

N° D'ORDRE

25.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. JULES ARNOULT.

1^{re} THÈSE. — SUR LE MOUVEMENT D'UN FIL DANS L'ESPACE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **24 JUIN** 1911 devant la Commission d'Examen.

MM. G. FLOQUET, *Président.*

VOGT,

HUSSON,

} *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1911

N° D'ORDRE

23.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. JULES ARNOULT.

1^{re} THÈSE. — SUR LE MOUVEMENT D'UN FIL DANS L'ESPACE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1911 devant la Commission d'Examen.



MM. G. FLOQUET, *Président.*

VOGT,
HUSSON, } *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1911

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

	MM.	
Doyen.....	FLOQUET.	
Assesseur.....	PETIT.	
Doyen honoraire.....	GRANDEAU.	
	GRANDEAU.	
	FRIANT.	
Professeurs honoraires....	HALLER.	
	BLONDLOT.	
	CARTAN.	
	BLAISE.	
Chargé de cours honoraire.	MILLOT.	
	LE MONNIER.....	Botanique.
	FLOQUET.....	Analyse.
	THOULET.....	Géologie et Minéralogie.
	MOLK.....	Mécanique rationnelle.
	CUËNOT.....	Zoologie.
	GUNTZ.....	Chimie minérale.
	VOGT.....	Mathématiques appliquées.
	PETIT.....	Chimie agricole.
Professeurs ...	MULLER.....	Chimie physique et Électro- chimie.
	NICKLÈS.....	Géologie.
	MINGUIN.....	Chimie.
	GUTTON.....	Physique.
	ROTHÉ.....	Physique.
	HUSSON.....	Calcul différentiel et intégral.
	GRIGNARD.....	Chimie organique.
	GUYOT.....	Chimie appliquée à la teinture et à l'impression.
	WAHL.....	Chimie industrielle.
Professeurs adjoints.....	GAIN.....	Botanique.
	BOUIN.....	Zoologie appliquée.
Maitres de conférences....	MAUDUIT.....	Electrotechnique.
	REBOUL.....	Physique.
	HAHN.....	Laboratoire de Mécanique appliquée.
Directeurs de Laboratoire..	WENCELIUS.....	Laboratoire d'analyses indus- trielles.
Chargés d'un cours complé- mentaire.....	MARSAL.....	Météorologie.
	DUMAS.....	Mécanique appliquée.
Secrétaire.....	ROVEL.	

A

MONSIEUR FLOQUET,

Hommage de respectueuse reconnaissance.

A MON PÈRE, A MA MÈRE,

Témoignage d'affection.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555804_0040

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LE

MOUVEMENT D'UN FIL DANS L'ESPACE

INTRODUCTION.

Le mouvement d'un fil dans *un plan fixe* a été étudié dans le Tome I du *Traité de Mécanique générale* de Résal. M. Résal, par des considérations géométriques et dynamiques, obtient un système de trois équations aux dérivées partielles pour déterminer l'angle α de la tangente à la figure Γ du fil avec l'axe des abscisses, les composantes u et v de la vitesse suivant la normale et la tangente à la courbe Γ , en fonction des deux variables indépendantes, l'arc s de Γ et le temps t . L'élimination de u et v conduirait à une équation aux dérivées partielles du *sixième ordre* qui n'est d'ailleurs pas formée.

M. Appell, dans un Mémoire *sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe* ⁽¹⁾, a ramené la recherche de ce mouvement à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du *quatrième ordre*.

Il prend pour variables indépendantes l'angle α que fait à l'instant t la tangente au fil en un point avec l'axe des abscisses, et le temps t ; pour fonction à déterminer une fonction p de α et t dont la dérivée partielle par rapport à α est égale à la distance de l'origine à la tangente au point considéré. Toutes les quantités qui figurent dans le

⁽¹⁾ *Acta mathematica*, t. XII.

problème s'expriment à l'aide de cette fonction p qui détermine complètement le mouvement.

En cherchant des solutions particulières de cette équation, M. Appell étudie l'équilibre, le repos apparent, le mouvement d'un fil glissant le long d'une courbe qui, ou bien est animée d'un mouvement de translation, ou bien reste homothétique d'elle-même par rapport à l'origine.

La dernière Partie est consacrée à l'étude des oscillations infiniment petites autour d'une position d'équilibre stable.

Citons aussi de M. Appell : *Quelques remarques sur les équations du mouvement d'une chaîne parfaitement flexible* ⁽¹⁾, où est indiquée une forme particulièrement simple, sous laquelle on peut mettre les équations du mouvement d'un fil homogène *dans un plan fixe* sous l'action de forces dépendant uniquement du temps.

M. Routh, dans le Tome II de son Ouvrage *Advanced Rigid Dynamics*, a traité beaucoup de problèmes sur les fils et leur tension. Il a indiqué une équation différentielle spéciale qui permet de calculer sous certaines conditions la tension du fil soumis à des forces connues. Il a traité des problèmes sur les variations brusques de tension et a étudié les oscillations planes d'un fil homogène pesant autour d'une position d'équilibre.

M. Floquet, dans une série de Notes à l'Académie des Sciences et dans des travaux publiés par la Société des Sciences de Nancy ⁽²⁾, a obtenu, entre autres résultats, une méthode qui ramène l'étude du mouvement et de la tension d'un fil *dans l'espace* à celle d'un système de *neuf* équations aux dérivées partielles du *premier ordre* qui, dans le cas du plan, se réduisent aux équations de M. Résal. Les neuf fonctions intégrales de ce système sont la courbure et la torsion de la figure du fil, sa tension, les projections sur la tangente Mx , la normale principale My , la binormale Mz , p , q , r , ξ , η , ζ de la rotation instantanée du trièdre dont les arêtes sont Mx , My , Mz et de la vitesse du point M .

⁽¹⁾ *Annaes da Academia polytechnica do Porto*, t. IV, 1909.

⁽²⁾ *Comptes rendus*, 10 octobre 1892, 1^{er} avril 1889, 25 juin, 2 et 9 juillet, 22 octobre 1900; *Bulletin de la Société des Sciences de Nancy*, novembre-décembre 1893, juin-juillet 1900.

Les variables indépendantes sont l'arc s de la figure du fil compté sur le fil à partir d'un point déterminé et le temps t .

M. Floquet a en outre ramené les équations du mouvement en coordonnées quelconques à une forme canonique.

M. Léauté, dans une Note à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 10 novembre 1879) et dans *Bulletin de la Société philomathique* (18 novembre 1879), a étudié le problème du repos apparent.

Indiquons, pour terminer, brièvement le plan de ce qui va suivre.

Le Chapitre I est consacré à l'étude des équations générales du mouvement d'un fil libre dans l'espace. La méthode employée consiste, après avoir établi certaines propositions géométriques dues à M. de Montcheuil, à utiliser ces résultats pour l'étude du mouvement d'un fil ⁽¹⁾ dans l'espace; de cette façon nous ramenons cette étude à celle d'un système de deux équations aux dérivées partielles du quatrième et cinquième ordre. Les fonctions inconnues sont deux fonctions d'un paramètre u et du temps qui, pour chaque instant déterminé sont intimement liées à la forme que présente le fil à cet instant.

Nous verrons de plus que la tension sera donnée d'une façon relativement simple. Nous avons indiqué succinctement cette méthode dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris le 13 juin 1910.

Après avoir étudié l'équilibre dans le Chapitre II, dans le Chapitre III nous établissons tout d'abord les équations du mouvement d'un fil qui a une figure permanente et qui est animé d'un mouvement de glissement sur elle.

En supposant successivement le fil homogène et hétérogène, nous traitons les cas où les composantes tangentielle et normale principale des forces extérieures sont fonctions de u seul ou de t seul et quelques cas particuliers.

Nous retrouvons ainsi les énoncés de M. Léauté, nous étendons au cas de l'espace ceux de MM. Appell et Floquet donnés pour le mouvement dans un plan fixe; en outre nous obtenons un certain nombre de résultats intéressants.

(1) Dans tout ce Mémoire, il n'est question que de fils inextensibles, aussi cette propriété sera-t-elle sous-entendue si elle n'est pas répétée dans chaque cas.

Ce qui a facilité nos recherches dans ces problèmes de l'équilibre et du repos apparent, ce sont les formes particulièrement simples des fonctions inconnues comme fonctions du temps; les équations générales du mouvement se sont simplifiées notablement.

Il en est de même pour le problème traité au Chapitre IV du mouvement d'un fil glissant sur une courbe invariable animée d'un mouvement de translation. Après avoir formé les équations d'un tel mouvement, nous examinons en détail, comme M. Appell pour le cas du mouvement dans un plan fixe, le cas où les composantes tangentielle, normale principale et binormale des forces extérieures appliquées à un fil homogène ne dépendent que de u .

Nous terminons l'étude de ce mouvement par un cas particulier déjà envisagé par M. Floquet d'une autre manière.

Dans le Chapitre V où nous nous proposons le mouvement d'un fil glissant sur une courbe qui reste homothétique à elle-même par rapport à un point fixe, les fonctions inconnues ont encore par rapport à t une forme particulière qui nous permet d'écrire les équations du mouvement d'une façon simple.

Nous examinons en particulier le cas où aucune force n'agit sur le fil homogène et nous sommes conduits à des calculs presque complètement identiques à ceux de M. Appell pour le mouvement dans un plan fixe.

Dans le Chapitre VI, en comparant et en combinant notre méthode à celle donnée par M. Appell pour l'étude du mouvement d'un fil homogène dans un plan fixe sous l'action de forces dépendant uniquement du temps (*Quelques remarques sur les équations d'une chaîne parfaitement flexible*), nous pouvons nous rendre compte de l'intimité des deux méthodes et déterminer un certain nombre de mouvements possibles d'un fil.

Jusqu'ici, dans les problèmes des Chapitres II, III, IV et V, nous avons cherché des solutions particulières du système d'équations aux dérivées partielles du cas général, ces solutions ayant une forme simple par rapport au temps; dans les Chapitres VII et VIII, où nous nous occupons de mouvements de fils glissant sur une courbe invariable animée d'un mouvement de rotation ou hélicoïdal autour d'une droite fixe, nous considérons le fil comme ayant un mouvement de

repos apparent par rapport à des axes liés à la courbe invariable, mouvement étudié au Chapitre III, et nous introduisons des fonctions du temps pour déterminer le mouvement de la courbe invariable. Après avoir établi les équations du mouvement, nous étudions en détail, dans le cas de la rotation, le problème du fil homogène soumis à des forces extérieures dont les composantes tangentielle, normale principale et binormale ne dépendent que de la variable u , ainsi qu'un problème particulier intéressant.

Au Chapitre IX, où nous traitons le problème du mouvement d'un fil glissant sur une courbe invariable se mouvant d'une façon quelconque, comme dans les deux derniers Chapitres, nous considérons le fil comme ayant un mouvement de repos apparent par rapport à des axes liés à la courbe invariable, et nous introduisons des fonctions du temps pour définir le mouvement de la courbe. Après avoir écrit les équations générales du mouvement où figurent des fonctions de u et des fonctions de t , nous les appliquons à deux cas particuliers dont l'un a été indiqué par M. Floquet.

Les Chapitres X et XI sont consacrés à l'étude de mouvements particuliers d'un fil tel que sa forme à chaque instant soit la développante ou la développée d'une courbe fixe en forme et en position. Les mouvements envisagés sont tels que si l'on considère la portion de fil S comprise entre deux éléments du fil et un fil auxiliaire de longueur, la portion de la courbe fixe dont S est soit la développante, soit la développée, ce fil auxiliaire soit homogène et inextensible, animé d'un mouvement de repos apparent sur la courbe fixe.

Outre des mouvements possibles du fil pour des lois de forces convenablement choisies, cette étude nous donne la solution de quelques problèmes géométriques, par exemple de celui-ci : Existe-t-il des courbes telles qu'à des arcs égaux pris sur elles correspondent des arcs de développante égaux entre eux ? Déterminer ces courbes et les développantes répondant à la question.

Dans le douzième et dernier Chapitre nous employons une méthode toute différente, utilisant les produits géométriques ou intérieurs, qui permet de mettre les équations du mouvement sous forme d'équations vectorielles.

Nous pouvons de cette manière résoudre certains problèmes sur la

nature de la surface engendrée par le fil et de la forme que présente le fil sur cette surface, et enfin retrouver certains résultats déjà obtenus dans d'autres Chapitres.

I.

Équations du mouvement.

1. Nous allons tout d'abord donner quelques remarques purement géométriques dont les résultats sont dus à M. de Montcheuil.

De là nous déduirons une méthode pour étudier le mouvement d'un fil libre dans l'espace soumis à des forces extérieures quelconques.

Rappelons qu'on entend par *courbe minima* ⁽¹⁾ une courbe imaginaire dont les tangentes rencontrent le cercle de l'infini. Considérons une courbe minima; par définition les tangentes de cette courbe rencontrent le cercle de l'infini. Nous en concluons par conséquent que la développable enveloppe des plans osculateurs de cette courbe devra contenir le cercle de l'infini, mais le cercle de l'infini étant une courbe unicursale, on peut prendre l'équation du plan tangent à la développable sous la forme rationnelle

$$(1 - u^2)x + i(1 + u^2)y + 2uz + 2C(u) = 0,$$

qui donne pour un point de l'arête de rebroussement les expressions de ses coordonnées :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 - u^2}{2} C'' + uC' - C, \\ y &= i \left(\frac{1 + u^2}{2} C'' - uC' + C \right), \\ z &= uC'' - C'. \end{aligned}$$

Ce sont rapidement établies les formules de Weierstrass ⁽²⁾ utilisées dans la théorie des surfaces minima.

⁽¹⁾ Les courbes minima jouent un grand rôle dans la théorie des surfaces minima.

⁽²⁾ WEIERSTRASS, *Ueber die Flächen deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist. Ueber eine besondere Gattung von minimal Flächen* (Monatsberichte der Berliner Academie).

Considérons une courbe Γ quelconque de l'espace; nous pouvons nous la représenter comme le lieu décrit par un point de la tangente à une courbe minima déterminée.

En effet, désignons les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe Γ par α, β, γ , que nous supposons être des fonctions d'un paramètre θ ; nous devrons avoir évidemment les relations

$$\alpha(1-u^2) + i\beta(1+u^2) + 2u\gamma + 2C(u) = 0,$$

$$\frac{d\alpha}{d\theta}(1-u^2) + i\frac{d\beta}{d\theta}(1+u^2) + 2u\frac{d\gamma}{d\theta} + 2C'(u) = 0,$$

qui expriment que le plan osculateur de la courbe minima contient le point de coordonnées $\alpha\beta\gamma$ et le point infiniment voisin.

Par l'élimination de θ , nous obtenons ainsi une valeur de C qui nous donne une courbe minima bien déterminée répondant à la condition énoncée.

Si nous avons supposé la courbe donnée par deux équations

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

l'élimination de x, y, z, dx, dy, dz entre

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \dots = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \dots = 0,$$

$$(1-u^2) dx + i(1+u^2) dy + 2u dz = 0,$$

$$\alpha(1-u^2) + i\beta(1+u^2) + 2u\gamma + 2C = 0,$$

nous conduirait au même résultat que précédemment.

Cela étant, nous pouvons donc écrire les coordonnées x, y, z d'un point d'une courbe quelconque de la manière suivante, x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées d'un point de la courbe minima supposées exprimées par les formules de Weierstrass :

$$x = x_1 + \frac{1-u^2}{2} \varphi(u),$$

$$y = y_1 + i\left(\frac{1+u^2}{2}\right) \varphi(u),$$

$$z = z_1 + u \varphi(u).$$

Nous aurons

$$\begin{aligned}x'_u &= x'_{1u} + u \varphi(u) + \frac{1-u^2}{2} \varphi'(u), \\y'_u &= y'_{1u} + i u \varphi(u) + i \frac{1+u^2}{2} \varphi'(u), \\z'_u &= z'_{1u} + \varphi(u) + u \varphi'(u);\end{aligned}$$

d'où

$$[(x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2] \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = 1;$$

ce qui donne

$$[\varphi(u)]^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = 1.$$

Si nous désignons la fonction $\varphi(u)$ par la dérivée par rapport à u d'une certaine fonction de u , $D(u)$, nous aurons

$$\varphi(u) = D';$$

nous aurons alors les formules

$$(1) \quad \begin{cases} x = \frac{1-u^2}{2} (C'' + D') + u C' - C, \\ y = i \left[\frac{1+u^2}{2} (C'' + D') - u C' + C \right], \\ z = u (C'' + D') - C', \\ s = D. \end{cases}$$

C désigne la fonction qui caractérise la courbe minima; C' , C'' sont les dérivées de cette fonction C par rapport à u .

D est une fonction de u , D' est sa dérivée par rapport à u ; nous avons vu précédemment la signification de cette quantité D' : c'est la valeur commune des rapports

$$\frac{x - x_1}{\frac{1-u^2}{2}} = \frac{y - y_1}{i \left(\frac{1+u^2}{2} \right)} = \frac{z - z_1}{u} = D'.$$

Nous voyons donc qu'une courbe quelconque peut être représentée à l'aide de ces formules qui définissent ses coordonnées en fonction du paramètre variable u , de la fonction de u , C et de ses dérivées première et seconde C' et C'' , et de la dérivée première D' de la fonction de u , D .

Nous avons vu précédemment comment, à toute courbe, on pouvait faire correspondre une fonction C ; comment déterminer D ?

Si la courbe est donnée par les deux équations

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

l'élimination de dx, dy, dz entre les trois équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz &= 0, \\ (1 - u^2) dx + i(1 + u^2) dy + 2u dz &= 0 \end{aligned}$$

nous fournit une équation qui, jointe aux équations de la courbe, nous donnera x, y, z en fonction de u . Si l'on n'a pas encore déterminé C , il sera donné par

$$(1 - u^2)x + i(1 + u^2)y + 2uz + 2C = 0.$$

Nous déduirons D' de $z = u(C'' + D') - C'$; par une quadrature nous aurons D .

Si les coordonnées de la courbe sont données en fonction de t , au moyen de la relation

$$u = \frac{dx + i dy}{ds - dz},$$

nous exprimerons θ en fonction de u ; d'où nous déduirons C et D comme précédemment; nous pouvons encore dire ceci : la relation

$$\alpha(1 - u^2) + i\beta(1 + u^2) + 2u\gamma + 2C(u) = 0$$

nous donnera u en fonction de θ ; comme précédemment on en déduira D .

Inversement, si l'on connaît C et D , la courbe est déterminée au moyen des formules (1) puisque l'on connaît les coordonnées d'un point quelconque et de plus son arc en fonction du paramètre u .

Ces formules ont été obtenues par M. de Montcheuil dans un

Mémoire sur la séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis ⁽¹⁾.

2. Nous allons montrer maintenant comment on peut ramener, au moyen des considérations précédentes, l'étude du mouvement du fil libre dans l'espace à celle d'un système de deux équations aux dérivées partielles du quatrième et du cinquième ordre.

Nous venons de voir qu'à toute courbe correspond une fonction $C(u)$ et une fonction $D(u)$; cette fonction $D(u)$ n'est d'ailleurs définie qu'à une constante près, car l'origine des arcs est arbitraire sur la courbe et l'on a

$$s = D(u).$$

Si nous considérons un fil libre dans l'espace se mouvant sous l'action de forces extérieures quelconques, inextensible, ce fil a une forme disposée suivant une courbe Γ à un instant quelconque t . A cette courbe Γ correspond une fonction bien déterminée de u , $C(u)$ et une fonction $D(u)$ définie à une constante près. Choisissons pour origine des arcs s sur la forme que présente le fil, la position à l'instant considéré d'un point déterminé du fil que nous obtiendrons par exemple pour fixer les idées en faisant un nœud dans le fil ou bien en prenant une des extrémités du fil; désignons par l'arc s la longueur du fil depuis cette origine ainsi choisie jusqu'au point physique, molécule bien déterminée du fil correspondant à cet instant à la valeur u du paramètre; s pour un point choisi sur le fil est indépendant du temps, puisque le fil est inextensible. Avec notre choix d'origine des arcs la fonction $D(u)$ est bien déterminée, nous voyons de plus que pour une valeur donnée de s correspondant à une molécule déterminée du fil, u varie avec le temps, puisque la fonction $D(u)$ varie; donc u est une fonction de t pour une valeur donnée de s . Ainsi à chaque instant il existe deux fonctions C et D de u qui déterminent les coordonnées d'un point quelconque du fil et la longueur d'un arc du fil compris entre deux molécules déterminées, et cela à l'aide des formules de M. de Montcheuil.

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXI, 1903.

Si nous pouvons déterminer des fonctions $C(u, t)$, $D(u, t)$ telles qu'à chaque valeur t du temps, on ait des fonctions de u , $C(u, t)$, $D(u, t)$ définissant à l'instant t la position du fil, les coordonnées d'un point quelconque du fil s'écriront

$$(1) \quad \begin{cases} x = \frac{1-u^2}{2} \left(\frac{\partial^2 C(u, t)}{\partial u^2} + \frac{\partial D(u, t)}{\partial u} \right) + u \frac{\partial C(u, t)}{\partial u} - C(u, t), \\ y = i \left[\frac{1+u^2}{2} \left(\frac{\partial^2 C(u, t)}{\partial u^2} + \frac{\partial D(u, t)}{\partial u} \right) - u \frac{\partial C(u, t)}{\partial u} + C(u, t) \right], \\ z = u \left(\frac{\partial^2 C(u, t)}{\partial u^2} + \frac{\partial D(u, t)}{\partial u} \right) - \frac{\partial C(u, t)}{\partial u}. \end{cases}$$

De plus, nous aurons pour la longueur du fil, de l'origine que nous avons choisie sur le fil à l'élément de coordonnées x, y, z la valeur de s donnée par la relation

$$(2) \quad s = D(u, t).$$

Nous avons vu que, pour une valeur donnée de s , u était une fonction de t ; ceci nous montre que, quand on donne à s les différentes valeurs correspondant aux diverses molécules du fil, u est une fonction de s et t définie par la relation (2).

Ces formules (1) et (2) existant quels que soient u et t nous donnent les coordonnées x, y, z d'un point quelconque du fil, ainsi que la longueur s du fil de l'origine choisie sur le fil à l'élément x, y, z du fil en fonction des deux variables indépendantes u et t .

Si nous faisons t égal à une constante, nous obtenons pour x, y, z, s des fonctions de u qui nous donnent les coordonnées d'un point du fil, ainsi que la longueur du fil jusqu'à cet élément depuis l'origine choisie sur le fil.

Si au contraire nous faisons u constant, nous obtenons des fonctions de t qui ne représentent point les coordonnées de la trajectoire d'un point physique du fil. Pour obtenir la trajectoire d'un tel point il faut lier les variables u et t par la relation suivante où s est une constante :

$$s = D(u, t).$$

Il nous reste à voir comment nous allons déterminer les deux fonctions $C(u, t)$ et $D(u, t)$.

Considérons les équations bien connues du mouvement d'un fil flexible et inextensible soumis en chacun de ses points à des forces quelconques :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \left[\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial T}{\partial s} + m \Phi, \\ m \left[\alpha' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right] = \frac{T}{\rho} + m \Psi, \\ m \left[\alpha'' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta'' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma'' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right] = m X, \\ \left[\frac{\partial x}{\partial s} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial s} \right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial s} \right]^2 = 1. \end{array} \right.$$

x, y, z désignent les coordonnées rapportées à un trièdre trirectangle, d'un élément ds ; s la longueur du fil depuis un point déterminé jusqu'à l'élément ds ; t le temps. $\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma', \alpha''\beta''\gamma''$ désignent respectivement les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale, de la binormale de la courbe forme du fil au point de coordonnées x, y, z à l'instant t ; les sens positifs étant choisis sur ces directions respectivement suivant la tangente positive, suivant la normale principale dirigée vers le centre de courbure et la binormale menée dans un sens tel que le trièdre formé par ces trois directions ait même disposition que celui de coordonnées $Oxyz$; Φ, Ψ, X désignant les composantes suivant ces trois directions de la force appliquée au point de coordonnées xyz et rapportée à l'unité de masse, $m ds$ étant la masse de l'élément ds , T sa tension, ρ le rayon de courbure de la forme du fil; m est une fonction connue de s qui se réduit à une constante quand le fil est homogène. Ces équations définissent x, y, z, T en fonction des deux variables indépendantes s et t .

En partant des formules (1) et (2), dans lesquelles u et t sont les nouvelles variables indépendantes, en appliquant les règles élémentaires du changement de variables et en remplaçant dans les équations (3) les différentes expressions obtenues, nous aurons des équations déterminant les fonctions de u et t , $C(u, t)$ et $D(u, t)$; nous verrons que ce sont deux équations aux dérivées partielles du quatrième et du cinquième ordre.

Dans les calculs qui vont suivre, nous représenterons les dérivées

partielles prises par rapport à u des quantités C, D, x, y, z au moyen des accents de dérivation habituels pour les fonctions d'une seule variable; nous emploierons la notation usuelle pour les dérivées partielles prises par rapport à t .

Lorsque nous voudrons avoir les composantes de la vitesse d'un point déterminé du fil, ou de son accélération, nous serons amenés à calculer les dérivées premières et secondes de x, y, z prises par rapport à t en supposant l'arc s constant; ces quantités seront différentes des dérivées partielles des mêmes expressions prises par rapport à t en supposant u constant à cause de la relation

$$s = D(u, t).$$

Nous emploierons pour les premières les symboles

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

en conservant les symboles habituels

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

pour désigner les dérivées partielles prises par rapport à t en supposant u constant.

De $s = D(u, t)$ nous tirons par dérivation

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{D'}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\frac{\partial D}{\partial t}}{D'}.$$

Nous avons d'autre part

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + x' \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\frac{\partial D}{\partial t}}{D'} x';$$

de même $\frac{dy}{dt}$ s'obtient en changeant les x en y dans $\frac{dx}{dt}$, et $\frac{dz}{dt}$ en changeant les y en z dans $\frac{dy}{dt}$.

Calculons $\frac{d^2x}{dt^2}$ qui s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\frac{\partial D}{\partial t}}{D'} x' \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\frac{\partial D}{\partial t}}{D'} x' \right) \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\frac{\partial D}{\partial t}}{D'} + x' \frac{2 \frac{\partial D}{\partial t} \frac{\partial D'}{\partial t} D' - \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^2 D'' + \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} D'^2}{D'^3} + x'' \left[\frac{\frac{\partial D}{\partial t}}{D'} \right]^2,\end{aligned}$$

$\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ s'obtiennent par la permutation circulaire xyz .

Calculons les quantités α , β , γ cosinus directeurs de la tangente positive :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\partial x}{\partial s} = x' \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{x'}{D'}, \\ \beta &= \frac{\partial y}{\partial s} = y' \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{y'}{D'}, \\ \gamma &= \frac{\partial z}{\partial s} = z' \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{z'}{D'}.\end{aligned}$$

Formons la quantité $\alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma \frac{d^2z}{dt^2}$. Il vient ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{D'} &\left\{ x' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + y' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + z' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2 \frac{\frac{\partial D}{\partial t}}{D'} \left(x' \frac{\partial x'}{\partial t} + y' \frac{\partial y'}{\partial t} + z' \frac{\partial z'}{\partial t} \right) \right. \\ &\quad \left. + (x' x'' + y' y'' + z' z'') \left(\frac{\frac{\partial D}{\partial t}}{D'} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \left(\frac{\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} D'^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^2 - 2 \frac{\partial D}{\partial t} \frac{\partial D'}{\partial t}}{D'^3} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Remarquons que nous avons

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = D'^2,$$

d'où nous déduisons

$$\begin{aligned}x' x'' + y' y'' + z' z'' &= D' D'', \\ x' \frac{\partial x'}{\partial t} + y' \frac{\partial y'}{\partial t} + z' \frac{\partial z'}{\partial t} &= D' \frac{\partial D'}{\partial t}.\end{aligned}$$

Nous avons à calculer $x' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + y' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + z' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$. Les expressions de x' , y' , z' sont :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1-u^2}{2} (C''' + D'') - u D', \\ y' &= i \left\{ \frac{1+u^2}{2} (C''' + D'') + u D' \right\}, \\ z' &= u (C''' + D'') + D'. \end{aligned}$$

Les valeurs de $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ s'obtiennent en remplaçant dans les valeurs de x , y , z les quantités C , C' , C'' , D' , par $\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 C'}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 C''}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 D'}{\partial t^2}$; d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{1-u^2}{2} \left(\frac{\partial^2 C''}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D'}{\partial t^2} \right) + u \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= i \left\{ \frac{1+u^2}{2} \left(\frac{\partial^2 C''}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D'}{\partial t^2} \right) - u \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \right\}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= u \left(\frac{\partial^2 C''}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D'}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2 D'}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$x' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + y' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + z' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C''' + D'') - \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} D'.$$

Remplaçons toutes ces quantités par leurs valeurs dans l'expression considérée, nous avons

$$\alpha \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{d^2 z}{dt^2} = - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \frac{C''' + D''}{D'} - \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}.$$

En remarquant que $\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial u} \frac{1}{D'}$, il vient, pour la première équation du mouvement,

$$\frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} + D' \Phi + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C''' + D'') + D' \left(\frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} \right) = 0.$$

Voyons maintenant la deuxième équation; calculons α' , β' , γ' . Nous

avons, d'après les formules connues,

$$\alpha' = \rho \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{\rho}{D'} \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\rho}{D'} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{x'}{D'} \right),$$

$$\alpha' = \frac{\rho}{D'^2} (x'' - \alpha D'');$$

de même

$$\beta' = \frac{\rho}{D'^2} (y'' - \beta D''),$$

$$\gamma' = \frac{\rho}{D'^2} (z'' - \gamma D'').$$

Formons la quantité $\alpha' \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta' \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma' \frac{d^2 z}{dt^2}$, il vient

$$\frac{\rho}{D'^2} \left\{ x'' \frac{d^2 x}{dt^2} + y'' \frac{d^2 y}{dt^2} + z'' \frac{d^2 z}{dt^2} - D'' \left[\alpha \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{d^2 z}{dt^2} \right] \right\}.$$

Le coefficient de D'' a été calculé précédemment. Il suffit de calculer

$$x'' \frac{d^2 x}{dt^2} + y'' \frac{d^2 y}{dt^2} + z'' \frac{d^2 z}{dt^2}$$

qui s'écrit

$$\begin{aligned} & (x''^2 + y''^2 + z''^2) \frac{\left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^2}{D'^2} + x'' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + y'' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + z'' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \\ & + (x' x'' + y' y'' + z' z'') \frac{2 \frac{\partial D}{\partial t} \frac{\partial D'}{\partial t} D' - \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^2 D'' - D'^2 \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}}{D'^3} \\ & - 2 \frac{\partial D}{\partial t} \left(x'' \frac{\partial x'}{\partial t} + y'' \frac{\partial y'}{\partial t} + z'' \frac{\partial z'}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Calculons

$$x'' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + y'' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + z'' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Appelons cette quantité A; nous venons de calculer l'expression

$$x' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + y' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + z' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

et nous avons trouvé

$$x' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + y' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + z' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C''' + D'') - D' \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2}.$$

Dérivons les deux membres par rapport à u , nous obtenons

$$A + x' \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} + y' \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} + z' \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} (C''' + 2 D'') - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C^{IV} + D''') - D' \frac{\partial^2 C''}{\partial t^2};$$

or, comme on a

$$x' \frac{\partial x'}{\partial t} + y' \frac{\partial y'}{\partial t} + z' \frac{\partial z'}{\partial t} = D' \frac{\partial D'}{\partial t},$$

en dérivant les deux membres par rapport à t , il vient

$$x' \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} + y' \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} + z' \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial x'}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial t} \right)^2 = \left(\frac{\partial D'}{\partial t} \right)^2 + D' \frac{\partial^2 D'}{\partial t^2},$$

d'où

$$A = \left(\frac{\partial x'}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} (C''' + 2 D'') - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C^{IV} + D''') - D' \frac{\partial^2 C''}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial D'}{\partial t} \right)^2 - D' \frac{\partial^2 D'}{\partial t^2}.$$

Comme les quantités $\frac{\partial x'}{\partial t}$, $\frac{\partial y'}{\partial t}$, $\frac{\partial z'}{\partial t}$ s'obtiennent en remplaçant dans x' , y' , z' les quantités C' , C'' , D' , D'' par leurs dérivées $\frac{\partial C}{\partial t}$, $\frac{\partial C'}{\partial t}$, $\frac{\partial C''}{\partial t}$, $\frac{\partial D'}{\partial t}$, $\frac{\partial D''}{\partial t}$, et qu'on a $x'^2 + y'^2 + z'^2 = D'^2$, on en déduit

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial t} \right)^2 = \left(\frac{\partial D'}{\partial t} \right)^2.$$

Les valeurs de x'' , y'' , z'' sont :

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{1-u^2}{2} (C^{IV} + D''') - u(C''' + 2 D'') - D', \\ y'' &= i \left[\frac{1+u^2}{2} (C^{IV} + D''') + u(C''' + 2 D'') + D' \right], \\ z'' &= u(C^{IV} + D''') + C''' + 2 D''; \end{aligned}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} x''^2 + y''^2 + z''^2 &= (C''' + 2 D'')^2 - 2 D' (C^{IV} + D'''), \\ x'' \frac{\partial x'}{\partial t} + y'' \frac{\partial y'}{\partial t} + z'' \frac{\partial z'}{\partial t} &= - D' \left(\frac{\partial C'''}{\partial t} + \frac{\partial D'''}{\partial t} \right) + \frac{\partial D'}{\partial t} (C''' + 2 D''). \end{aligned}$$

En tenant compte de ces valeurs, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 x'' \frac{d^2 x}{dt^2} + y'' \frac{d^2 y}{dt^2} + z'' \frac{d^2 z}{dt^2} &= (C''' + 2 D'')^2 \frac{\left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)^2}{D'^2} - 2 \left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)^2 \frac{C^{IV} + D'''}{D'} \\
 &+ 2 \left(\frac{\partial C'''}{\partial t} + \frac{\partial D''}{\partial t}\right) \frac{\partial D}{\partial t} - 2 \frac{\partial D}{\partial t} \frac{\partial D'}{\partial t} \frac{C''' + 2 D''}{D'} - \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} (C''' + 2 D'') \\
 &- \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C^{IV} + D''') - D' \left(\frac{\partial^2 C''}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D'}{\partial t^2}\right) + 2 \frac{\partial D}{\partial t} \frac{\partial D'}{\partial t} \frac{D''}{D'} \\
 &- \left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)^2 \frac{D''^2}{D'^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} D'';
 \end{aligned}$$

d'où la deuxième équation du mouvement

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho}{D'^2} &\left[(C''' + 2 D'')^2 \left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)^2 \frac{1}{D'^2} - 2 \left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)^2 \frac{C^{IV} + D'''}{D'} + 2 \frac{\partial D}{\partial t} \left(\frac{\partial C'''}{\partial t} + \frac{\partial D''}{\partial t}\right) \right. \\
 &- 2 \frac{\partial D}{\partial t} \frac{\partial D'}{\partial t} \frac{C''' + D''}{D'} - \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} (C''' + D'') - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C^{IV} + D''') \\
 &\left. - D' \left(\frac{\partial^2 C''}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D'}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \frac{(C''' + D'') D''}{D'} - \left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)^2 \frac{D''^2}{D'^2} \right] = \frac{T}{m \rho} + \Psi.
 \end{aligned}$$

Le rayon de courbure ρ est donné par l'équation

$$\frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}{\rho^2} = (x'^2 + y'^2 + z'^2) (x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x' x'' + y' y'' + z' z'')^2.$$

Ce qui s'écrit, après remplacement des quantités qui figurent dans l'équation par leurs valeurs et suppression du facteur D'^2 ,

$$\frac{D'^4}{\rho^2} = (C''' + 2 D'')^2 - 2 D' (C^{IV} + D''') - D''^2.$$

Voyons la troisième équation; nous avons

$$\begin{aligned}
 \alpha'' &= \frac{y' z'' - z' y''}{\sqrt{(y' z'' - z' y'')^2 + (z' x'' - x' z'')^2 + (x' y'' - y' x'')^2}} = \frac{\rho (y' z'' - z' y'')}{D'^3}, \\
 \beta'' &= \frac{\rho (z' x'' - x' z'')}{D'^3}, \\
 \gamma'' &= \frac{\rho (x' y'' - y' x'')}{D'^3}.
 \end{aligned}$$

Formons la quantité $\alpha'' \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta'' \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma'' \frac{d^2 z}{dt^2}$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{D^{1/3}} \left\{ & [x''(y'z'' - z'y'') + y''(z'x'' - x'z'') + z''(x'y'' - y'x'')] \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^2 \right. \\ & + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} (y'z'' - z'y'') + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} (z'x'' - x'z'') + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} (x'y'' - y'x'') \\ & - 2 \left[\frac{\partial x'}{\partial t} (y'z'' - z'y'') + \frac{\partial y'}{\partial t} (z'x'' - x'z'') + \frac{\partial z'}{\partial t} (x'y'' - y'x'') \right] \frac{\partial D}{\partial t} \\ & + [x'(y'z'' - z'y'') + y'(z'x'' - x'z'') \\ & \quad \left. + z'(x'y'' - y'x'')] \frac{2 \frac{\partial D}{\partial t} \frac{\partial D'}{\partial t} D' - \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^2 D'' - \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} D'^2}{D^3} \right\}. \end{aligned}$$

Ce qui se réduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{D^{1/3}} \left\{ & \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} (y'z'' - z'y'') + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} (z'x'' - x'z'') + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} (x'y'' - y'x'') \right. \\ & \left. - 2 \left[\frac{\partial x'}{\partial t} (y'z'' - z'y'') + \frac{\partial y'}{\partial t} (z'x'' - x'z'') + \frac{\partial z'}{\partial t} (x'y'' - y'x'') \right] \frac{\partial D}{\partial t} \right\}. \end{aligned}$$

Formons les quantités $y'z'' - z'y''$, $z'x'' - x'z''$, $x'y'' - y'x''$:

$$\begin{aligned} y'z'' - z'y'' = i \left[\frac{1-u^2}{2} (C''' + D''') (C'' + 2D'') \right. \\ \left. - \frac{1-u^2}{2} D' (C^{IV} + D''') - u D' (C''' + D'') - D'^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'x'' - x'z'' = - \frac{1+u^2}{2} (C''' + D''') (C'' + 2D'') \\ + \frac{1+u^2}{2} D' (C^{IV} + D''') - u D' (C''' + D'') - D'^2, \end{aligned}$$

$$x'y'' - y'x'' = i [u (C''' + D'') (C'' + 2D'') - u D' (C^{IV} + D''') + D' (C''' + D'')].$$

Calculons

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} (y'z'' - z'y'') + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} (z'x'' - x'z'') + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} (x'y'' - y'x''),$$

nous obtenons

$$i \left[-D'^2 \left(\frac{\partial^2 C''}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D'}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} D' (C''' + D'') - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C''' + D'') (C'' + 2D'') + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} D' (C^{iv} + D''') \right].$$

Calculons

$$\frac{\partial x'}{\partial t} (y' z'' - z' y'') + \frac{\partial y'}{\partial t} (z' x'' - x' z'') + \frac{\partial z'}{\partial t} (x' y'' - y' x''),$$

nous obtenons

$$i \left[D' \frac{\partial D'}{\partial t} (C''' + D'') - D'^2 \left(\frac{\partial C'''}{\partial t} + \frac{\partial D''}{\partial t} \right) \right].$$

La troisième équation du mouvement s'écrit donc

$$\frac{i\rho}{D'^3} \left[-D'^2 \left(\frac{\partial^2 C''}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D'}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} D' (C''' + D'') - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C''' + D'') (C'' + 2D'') + D' \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C^{iv} + D''') - 2 \frac{\partial D}{\partial t} \frac{\partial D'}{\partial t} (C''' + D'') + 2 \frac{\partial D}{\partial t} D' \left(\frac{\partial C'''}{\partial t} + \frac{\partial D''}{\partial t} \right) \right] = X.$$

Nous avons ainsi les trois équations du mouvement; nous allons transformer ce système.

Reprenons la deuxième équation du mouvement; elle peut s'écrire, en multipliant les deux membres par D' ,

$$\frac{D'^3}{\rho^2} \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^2 + 2 D' \frac{\partial D}{\partial t} \left(\frac{\partial C'''}{\partial t} + \frac{\partial D''}{\partial t} \right) - 2 \frac{\partial D}{\partial t} \frac{\partial D'}{\partial t} (C''' + D'') - \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} (C''' + D'') D' - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} D' (C^{iv} + D''') + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} D'' (C''' + D'') - D'^2 \left(\frac{\partial^2 C''}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D'}{\partial t^2} \right) = \frac{D'^3}{\rho_m^2} T + \frac{D'^3}{\rho} \Psi.$$

Retranchons membre à membre de cette équation la troisième équation du mouvement dont les deux membres auront été multipliés auparavant par $\frac{i\rho}{D'^3}$; il vient

$$\begin{aligned} & \frac{D'^3}{\rho^2} \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} [(C''' + D'') (C'' + 2D'') + D'' (C''' + D'') - 2 D' (C^{iv} + D''')] \\ &= \frac{D'^3}{\rho_m^2} T + \frac{D'^3}{\rho} (\Psi + iX); \end{aligned}$$

ce qui donne l'équation

$$T = m \left[\left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^2 + D' \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} - \rho(\Psi + iX) \right].$$

Cette équation nous donne la tension d'une façon explicite quand les fonctions C et D seront connues.

Ces fonctions C et D seront données par les première et troisième équations du mouvement où la tension est remplacée par la valeur calculée à l'aide de C et D :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ m \left[\left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^2 + D' \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} - \rho(\Psi + iX) \right] \right\} \\ & + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C''' + D'') + D' \left(\frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} \right) + D' \Phi = 0, \\ & \frac{i D'^3 X}{\rho} - D'^2 \left(\frac{\partial^2 C''}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D'}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} D' (C''' + D'') - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C''' + D'') (C''' + 2 D'') \\ & + D' \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C'' + D'') - 2 \frac{\partial D}{\partial t} \frac{\partial D'}{\partial t} (C''' + D'') + 2 D' \frac{\partial D}{\partial t} \left(\frac{\partial C'''}{\partial t} + \frac{\partial D''}{\partial t} \right) = 0. \end{aligned}$$

Le système de ces deux équations aux dérivées partielles nous donnera C et D.

La première équation est du cinquième ordre, la deuxième du quatrième.

Φ, Ψ, X sont en général fonctions de $u, t, x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; donc fonctions de u, t, C, D et de leurs dérivées successives.

A tout système particulier d'intégrales de ces équations correspond un mouvement possible du fil, à condition que la valeur de la tension fournie par l'équation qui exprime la tension en fonction de C et D soit positive.

L'étude du mouvement d'un fil dans l'espace est donc ramenée à celle d'un système de deux équations aux dérivées partielles du quatrième et du cinquième ordre. En cherchant des solutions particulières de ce système, nous pourrions résoudre un certain nombre de problèmes.

Dans le cas du mouvement d'un fil dans un plan fixe que nous supposons être celui des xy , nous avons pour déterminer les fonctions

C et D le système suivant :

$$(1) \quad z = u(C' + D') + C' = 0,$$

$$(2) \quad \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ m \left[\left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^2 + D' \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} - \rho \Psi \right] \right\} \\ + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C''' + D'') + D' \left(\frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} \right) + D' \Phi = 0.$$

L'équation (1) est du deuxième ordre, l'équation (2) est du troisième, car dans ce cas nous avons

$$\rho = iu D'.$$

Le premier membre de la troisième équation du mouvement étant une identité, dans ce cas, la composante X doit être nulle, les forces doivent être dans le plan fixe.

APPLICATION A QUELQUES CAS PARTICULIERS.

II.

Équilibre.

3. L'équilibre est le cas le plus simple qui puisse se présenter.

Nous allons chercher les formes que prennent les fonctions C et D dans ce cas particulier de l'équilibre.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait équilibre, c'est que la vitesse d'un point quelconque du fil soit nulle (1).

Nous avons donc les trois équations suivantes, en écrivant que les trois composantes de la vitesse suivant la tangente, la normale prin-

(1) Nous pourrions écrire tout de suite que, dans le cas de l'équilibre, C et D sont des fonctions de u seulement. Nous avons préféré néanmoins trouver ces résultats directement, ne serait-ce que pour la vérification de nos calculs.

principale et la binormale sont nulles :

$$\alpha \frac{dx}{dt} + \beta \frac{dy}{dt} + \gamma \frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\alpha' \frac{dx}{dt} + \beta' \frac{dy}{dt} + \gamma' \frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\alpha'' \frac{dx}{dt} + \beta'' \frac{dy}{dt} + \gamma'' \frac{dz}{dt} = 0.$$

Ce qui donne pour la première

$$\frac{1}{D'} \left(x' \frac{\partial x}{\partial t} + y' \frac{\partial y}{\partial t} + z' \frac{\partial z}{\partial t} \right) - \frac{\frac{\partial D}{\partial t}}{D'^2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0,$$

ou bien

$$(1) \quad \frac{\partial C}{\partial t} (C''' + D'') + D' \frac{\partial C'}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial t} D' = 0;$$

pour la deuxième

$$\alpha' \frac{\partial x}{\partial t} + \beta' \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\frac{\partial D}{\partial t}}{D'} (\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z') = 0,$$

ce qui se réduit à

$$\alpha' \frac{\partial x}{\partial t} + \beta' \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial z}{\partial t} = 0;$$

d'où, par conséquent,

$$D' \left(x'' \frac{\partial x}{\partial t} + y'' \frac{\partial y}{\partial t} + z'' \frac{\partial z}{\partial t} \right) = D'' \left(x' \frac{\partial x}{\partial t} + y' \frac{\partial y}{\partial t} + z' \frac{\partial z}{\partial t} \right).$$

Comme on a la relation

$$x'' \frac{\partial x}{\partial t} + y'' \frac{\partial y}{\partial t} + z'' \frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{\partial C}{\partial t} (C'' + D'') - \frac{\partial C'}{\partial t} (C''' + 2D'') - D' \left(\frac{\partial C''}{\partial t} + \frac{\partial D'}{\partial t} \right),$$

la deuxième équation s'écrit

$$(2) \quad \frac{\partial C}{\partial t} D' (C'' + D'') + \frac{\partial C'}{\partial t} D' (C''' + 2D'') + D'^2 \left(\frac{\partial C''}{\partial t} + \frac{\partial D'}{\partial t} \right) \\ + \frac{\partial C}{\partial t} D'' (C'' + D'') - D' D'' \frac{\partial C'}{\partial t} = 0.$$

La troisième relation, en enlevant le facteur $\frac{\rho}{D'^2}$, devient

$$\left[(y' z'' - z' y'') \frac{\partial x}{\partial t} + (z' x'' - x' z'') \frac{\partial y}{\partial t} + (x' y'' - y' x'') \frac{\partial z}{\partial t} \right] D' - \frac{\partial D}{\partial t} [x' (y' z'' - z' y'') + y' (z' x'' - x' z'') + z' (x' y'' - y' x'')] = 0,$$

ce qui se réduit au coefficient de D' qui s'écrit, en remplaçant en fonction de C et D les quantités qui y figurent,

$$(3) \quad D'^2 \left(\frac{\partial C''}{\partial t} + \frac{\partial D'}{\partial t} \right) + D' (C''' + D'') \frac{\partial C'}{\partial t} + (C''' + D'') (C''' + 2D'') \frac{\partial C}{\partial t} + D' \frac{\partial C}{\partial t} (C^{iv} + D''') = 0.$$

Retranchons membre à membre les relations (2) et (3), nous obtenons

$$- \frac{\partial C}{\partial t} D'' (C''' + D'') + \frac{\partial C}{\partial t} (C''' + D'') (C''' + 2D'') = 0,$$

ou bien

$$\frac{\partial C}{\partial t} (C''' + D'')^2 = 0,$$

relation équivalente à la suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} (C''' + D'') = 0;$$

d'où nous déduisons, en dérivant par rapport à u ,

$$\frac{\partial C'}{\partial t} (C''' + D'') + \frac{\partial C}{\partial t} (C^{iv} + D''') = 0.$$

Nos trois relations, en tenant compte de la dernière et de celle obtenue ci-dessus, deviennent

$$D' \left(\frac{\partial C'}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) = 0,$$

$$D' \left(\frac{\partial C''}{\partial t} + \frac{\partial D'}{\partial t} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} (C''' + D'') = 0.$$

Supposons d'abord $C''' + D'' = 0$, ce qui revient à dire que $C'' + D'$

est une fonction de t , mais la deuxième relation nous prouve que dans ce cas $C'' + D'$ est une constante, donc $C' + D$ est une fonction de t , mais d'après la première $C' + D$ est une constante K . Mais alors les formules de M. de Montcheuil deviennent

$$\begin{aligned}x &= uC' - C, \\y &= i(-uC' + C), \\z &= -C', \\s &= D = K - C'.\end{aligned}$$

La courbe serait donc une hélice tracée sur un cylindre d'axe Oz de révolution et de rayon nul. Il n'y a que l'axe Oz comme courbe réelle, ce qui est un cas bien particulier que nous ne supposons pas.

Donc nous aurons

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire que C est une fonction de u seulement.

Les deux autres relations nous indiquent que D est aussi une fonction de u seulement.

Les équations d'équilibre sont donc

$$\begin{aligned}X &= 0, \\ \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial u} (-m\rho\Psi) + D'\Phi &= 0.\end{aligned}$$

Quant à la tension elle est donnée par l'équation

$$T = -m\rho\Psi.$$

Ce sont les équations d'équilibre bien connues; nous aurions pu les écrire tout de suite en nous servant de ce que

$$\frac{\partial}{\partial s} (-m\rho\Psi) = \frac{\partial}{\partial u} (-m\rho\Psi) \frac{1}{D'}.$$

Nous retrouvons ainsi ce fait que, *dans le cas de l'équilibre, en chaque point du fil, la force qui y est appliquée est située dans le plan osculateur de la forme du fil en ce point.*

4. *Cas de la pesanteur.* — Examinons plus spécialement le cas de la

pesanteur, nous supposons que le trièdre de coordonnées $Oxyz$ soit tel que l'axe Oz soit vertical et dirigé vers le zénith. Nous avons alors dans ce cas particulier

$$\Phi = -g\gamma, \quad \Psi = -g\gamma', \quad X = -g\gamma''.$$

Les équations d'équilibre deviennent

$$\gamma'' = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} (m\rho\gamma') - mD'\gamma = 0,$$

ou bien en explicitant

$$u(C''' + D'') (C''' + 2D'') - uD' (C^{iv} + D''') + D' (C''' + D'') = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{m\rho^2 (D'z'' - z'D'')}{D'^3} \right] - mz' = 0.$$

Cette dernière équation s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial u} (mD'u) + [u(C''' + D'') + D'] m = 0.$$

Car la quantité sous le signe de dérivation est

$$\rho^2 \frac{D'z'' - z'D''}{D'^3} = \frac{[uD' (C^{iv} + D''') + D' (C''' + 2D'') - uD'' (C''' + D'') - D'D'']}{(C''' + 2D'')^2 - 2D' (C^{iv} + D''') - D''^2} D';$$

ou, en tenant compte de la première équation, elle devient

$$\frac{D' [u(C''' + D'')^2 + 2D' (C''' + D'')] u}{-uC''' (C''' + 2D'') - 2D' (C''' + D'') - uD''^2} \\ = \frac{uD' (C''' + D'') [u(C''' + D'') + 2D']}{(C''' + D'') [-uC''' (C''' + 2D'') - 2D' (C''' + D'') - uD''^2]} = -uD'.$$

Les équations d'équilibre sont donc :

$$(4) \quad u(C''' + D'') (C''' + 2D'') - uD' (C^{iv} + D''') + D' (C''' + D'') = 0,$$

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial u} (mD'u) + m[u(C''' + D'') + D'] = 0,$$

système de deux équations différentielles du quatrième et du troisième ordre.

Supposons le fil homogène, la deuxième équation (5) s'intègre tout de suite et donne, K_1 étant une constante,

$$u D' + u(C'' + D') - C' + K_1 = 0;$$

en dérivant cette relation on a

$$u(C''' + 2D'') + 2D' = 0;$$

en portant la valeur de $(C''' + 2D'')$, tirée de cette équation, dans la première équation d'équilibre (4), il vient

$$u(C'' + D'') + (C''' + D'') = 0;$$

d'où

$$C''' + D'' = \frac{C_1}{u},$$

C_1 étant une constante.

Par deux intégrations successives, on obtient :

$$C'' + D' = C_1 L u + C_2,$$

C_2 étant une constante;

$$C' + D = C_1 u L u - C_1 u + u C_2 + C_3,$$

C_3 étant une constante; d'où, pour déterminer D , l'équation suivante :

$$u D' + D + C_1 u - C_3 + K_1 = 0.$$

C'est une équation linéaire qui nous donne pour intégrale générale

$$D = -\frac{C_1 u}{2} + \frac{K_2}{u} + C_3 - K_1,$$

K_2 étant une constante.

Voyons la direction du plan osculateur; pour cela, calculons les valeurs des quantités

$$(y' z'' - z' y''), \quad (z' x'' - x' z''), \quad (x' y'' - y' x''),$$

il vient

$$y' z'' - z' y'' = \frac{i D'}{2 u^2} (2 K_2 - C_1),$$

$$z' x'' - x' z'' = \frac{D'}{2 u^2} (2 K_2 + C_1),$$

$$x' y'' - y' x'' = 0.$$

Ce calcul nous montre que la courbe est plane et située dans un plan vertical.

Voyons la forme de cette courbe; pour cela, supposons que les constantes aient des valeurs telles que $(2K_2 - C_1)$ soit nul; alors le plan sera parallèle au plan xOz ; il nous suffira pour cela de faire

$$K_2 = \frac{C_1}{2}.$$

Au lieu de calculer directement x, y, z , il est plus simple de calculer leurs dérivées x', y', z' , et d'intégrer; en tenant compte des valeurs de C et D trouvées, et en supposant $K_2 = \frac{C_1}{2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} x' &= \frac{C_1}{u}, \\ y' &= 0, \\ z' &= \frac{C_1}{2} \left(1 - \frac{1}{u^2} \right). \end{aligned}$$

D'où, par intégration, nous déduisons

$$\begin{aligned} x &= a + C_1 L u, \\ y &= h, \\ z &= b + \frac{C_1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right), \end{aligned}$$

a, b, h étant des constantes.

Nous devons obtenir pour y une valeur constante; nous obtenons, par l'élimination de u , l'équation de la courbe dans le plan zOx

$$z - b = \frac{C_1}{2} \left(e^{\frac{x-a}{C_1}} - e^{-\frac{x-a}{C_1}} \right).$$

C'est une chaînette d'axe vertical de sommet a, b . Nous obtenons donc ce résultat bien connu :

La figure d'équilibre d'un fil homogène pesant est une chaînette d'axe vertical.

III.

Repos apparent.

5. Le repos apparent est le cas le plus simple qui se présente après celui du repos absolu. C'est le mouvement d'un fil qui glisse sur une courbe fixe. Pour que le fil ait une figure permanente, il faut et il suffit que la vitesse d'un point quelconque, à un moment quelconque, soit dirigée suivant la tangente à la forme du fil à cet instant ⁽¹⁾, c'est-à-dire que nous devons avoir les deux relations

$$\alpha' \frac{dx}{dt} + \beta' \frac{dy}{dt} + \gamma' \frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\alpha'' \frac{dx}{dt} + \beta'' \frac{dy}{dt} + \gamma'' \frac{dz}{dt} = 0.$$

Ces relations peuvent se remplacer par le système suivant, obtenu dans le cas de l'équilibre où ces deux relations figuraient non point seules, mais accompagnées d'une troisième :

$$\frac{\partial C''}{\partial t} + \frac{\partial D'}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} (C'' + D'') = 0.$$

Supposons qu'on ait

$$C''' + D'' = 0.$$

En tenant compte de la première relation, nous obtenons, K étant une constante,

$$C'' + D' = K.$$

Remarquons que cette hypothèse, introduite dans l'expression du rayon de courbure, nous donne pour ρ une valeur infinie.

La figure permanente serait donc une droite; d'ailleurs, si nous

(1) Les résultats que nous allons obtenir sont évidents, *a priori*; nous avons néanmoins préféré les trouver directement; car, outre la vérification de nos formules, cela nous montre qu'il ne peut y avoir mouvement de repos apparent d'une autre manière.

nous reportons aux valeurs de x' , y' , z' , en tenant compte de l'hypothèse, nous obtenons

$$x' = -u D', \quad y' = iu D', \quad z' = D';$$

ce qui donne par intégration, en revenant à la variable s ,

$$z = s + \theta,$$

θ étant une fonction arbitraire de t ; le fil aurait donc pour figure permanente une droite parallèle à Oz . C'est un cas bien particulier qu'il est préférable d'étudier séparément sur les équations primitives du mouvement.

Supposons donc qu'on ait

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0.$$

Cette hypothèse nous donne pour la première relation

$$\frac{\partial D'}{\partial t} = 0.$$

Nous en déduisons que, dans le cas du repos apparent, C est une fonction de u seul; D est la somme d'une fonction de u , U , et d'une fonction de t , D_1 ,

$$D = U + D_1.$$

Supposons que ces conditions sur la forme des fonctions C et D soient vérifiées; nous allons voir que, cela étant, la forme du fil est la même, quel que soit l'instant choisi, et qu'un point déterminé du fil et quelconque a cette même courbe pour trajectoire. En effet, on a

$$s = U + D_1;$$

de cette relation nous pouvons tirer

$$u = f(s - D_1).$$

D'autre part, comme les fonctions C et D' ne dépendent pas explicitement de t , nous aurons pour x , y , z des fonctions de u seulement :

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u).$$

En faisant la transformation définie par

$$u = f(s - D_1),$$

nous obtiendrons pour x, y, z des expressions de la forme suivante :

$$(1) \quad x = \varphi_1(s - D_1) \quad y = \varphi_2(s - D_1), \quad z = \varphi_3(s - D_1).$$

Si nous faisons $t = t_0$, nous obtenons pour x, y, z des fonctions de s qui définissent la même courbe Γ quelle que soit la constante t_0 .

Si, d'autre part, nous faisons s égal à s_0 , en posant

$$D_1(t) = \theta,$$

θ étant un paramètre variable, nous aurons pour x, y, z des fonctions de θ qui détermineront la même courbe Γ quel que soit s_0 .

Le fil sera toujours inextensible, car dans tous les calculs, en particulier dans l'expression des composantes de la vitesse, nous aurons tenu compte de ce fait que la longueur d'un arc du fil ne varie point avec le temps.

D'après les formules écrites plus haut (1), on voit immédiatement que la vitesse est donnée par la formule

$$v = - \frac{dD_1}{dt}.$$

Voyons la signification de cette fonction D_1 directement; pour cela voyons l'intensité de la vitesse v qui est donnée par la quantité

$$v = \alpha \frac{dx}{dt} + \beta \frac{dy}{dt} + \gamma \frac{dz}{dt}.$$

Or, cette quantité a été calculée à propos de l'équilibre et nous avons trouvé pour valeur

$$\frac{1}{D'} \left[- \frac{\partial C}{\partial t} (C'' + D'') - D' \frac{\partial C'}{\partial t} - D' \frac{\partial D}{\partial t} \right].$$

En tenant compte des formes de C et D , dans le cas qui nous occupe, il vient

$$v = - \frac{dD_1}{dt}.$$

Donc, dans le cas du repos apparent, la vitesse de glissement est égale

à la dérivée première par rapport à t de la fonction D_1 , changée de signe.

Voyons maintenant les équations du mouvement. Ce sont

$$\begin{aligned} X &= 0, \\ -\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ m \left[\rho \Psi - \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 \right] \right\} + U' \left(\Phi + \frac{d^2 D_1}{dt^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Quant à la tension, elle est donnée par l'équation

$$T = m \left[-\rho \Psi + \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 \right].$$

Les deux premières équations serviront à déterminer les deux fonctions inconnues C et $U + D_1$, la dernière donne la tension.

Nous retrouvons ce fait que *la résultante des forces appliquées en un point, dans le cas du repos apparent, se trouve dans le plan osculateur de la forme du fil en ce point.*

6. Plaçons-nous encore dans le cas du repos apparent et, le fil étant homogène, supposons que les forces extérieures appliquées au fil ou tout au moins les composantes Φ et Ψ , suivant la tangente et la normale principale, ne dépendent que de x, y, z, u et par conséquent ne dépendent pas de t . Dans ce cas, les équations du mouvement deviennent

$$\begin{aligned} X &= 0, \\ -\frac{\partial}{\partial u} \left[\rho \Psi - \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 \right] + U' \left(\Phi + \frac{d^2 D_1}{dt^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\Phi - \frac{1}{U'} \frac{\partial}{\partial u} (\rho \Psi) = \frac{d^2 D_1}{dt^2}.$$

Comme le premier membre ne dépend que de u et que le second ne dépend que de t , cette équation est équivalente au système suivant où K est une constante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (\rho \Psi) &= (-K + \Phi) U', \\ \frac{d^2 D_1}{dt^2} &= K. \end{aligned}$$

D'où nous tirons

$$\frac{dD_1}{dt} = k t + k';$$

ce qui signifie que la vitesse de glissement du fil est proportionnelle au temps.

Quant aux équations du mouvement, ce sont

$$-\frac{\partial}{\partial u}(\rho\Psi) + U'(\Phi - K) = 0, \\ X = 0.$$

De l'inspection même de ces équations nous déduisons l'énoncé du théorème suivant donné par M. Appell dans le cas du mouvement d'un fil dans un plan fixe ⁽¹⁾ :

Lorsque les forces extérieures ou seulement les composantes de ces forces, suivant la tangente et la normale principale, dépendent seulement de la position de l'élément du fil, et que le fil conserve une figure permanente, la vitesse de glissement du fil est proportionnelle au temps, et la forme permanente du fil en mouvement est la figure d'équilibre que prendrait le fil si la composante tangentielle de la force était augmentée d'une constante égale à l'accroissement de la vitesse pendant l'unité de temps.

Remarquons qu'une fois les fonctions C et U connues, la forme du fil est donnée par

$$x = \frac{1-u^2}{2}(C'' + U') + uC' - C, \\ y = i \left[\frac{1+u^2}{2}(C'' + U') - uC' + C \right], \\ z = u(C'' + U') - C', \\ s = U + D_1.$$

7. Comme application, supposons un fil soumis à l'action de la pesanteur.

⁽¹⁾ *Acta mathematica*, t. XII. Ce cas a été étudié par M. Léauté.

Dans ce cas, les composantes Φ , Ψ , X ont les valeurs suivantes :

$$\Phi = -g\gamma = -\frac{g}{U'}[u(C''' + U'') + U'],$$

$$\Psi = -g\gamma' = -\frac{g\rho}{U'^3}[u(C'' + U''')U' + U'(C''' + U'') - uU''(C''' + U'')],$$

$$X = -g\gamma'' = -\frac{ig\rho}{U'^2}[u(C''' + U'')(C''' + 2U'') - uU'(C'' + U''') + U'(C''' + U'')],$$

en supposant que le trièdre de coordonnées $Oxyz$ soit tel que l'axe Oz soit vertical et dirigé vers le zénith.

Nous avons alors toujours

$$\frac{dD_1}{dt} = Kt + K';$$

puis, pour équations du mouvement, les deux suivantes :

$$\begin{aligned} u(C''' + U'')(C''' + 2U'') - uU'(C'' + U''') + U'(C''' + U'') &= 0, \\ -\frac{\partial}{\partial u}(uU') + U' \left[-\frac{K}{g} - \frac{u(C''' + U'') + U'}{U'} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation s'écrit

$$u(C''' + 2U'') + U' \left(2 + \frac{K}{g} \right) = 0.$$

En tirant la valeur de $(C''' + 2U'')$ de cette équation, portant dans la première et en supprimant le facteur U' qui n'est point nul, il vient

$$-u(C'' + U''') - (C''' + U'') \left(1 + \frac{K}{g} \right) = 0.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre en $(C''' + U'')$ qui intégrée donne, C_1 étant une constante,

$$C''' + U'' = C_1 u^{-\left(1 + \frac{K}{g}\right)}.$$

En tenant compte de cette valeur de $C''' + U''$, la deuxième devient

$$C_1 u^{-\frac{K}{g}} + uU'' + U' \left(2 + \frac{K}{g} \right) = 0.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre en U' qui, une

fois intégrée, donne, C_2 étant une constante arbitraire,

$$U' = -\frac{C_1}{2} u^{-\frac{K}{g}} + C_2 u^{-(2+\frac{K}{g})}.$$

Voyons la direction du plan osculateur en un point quelconque; pour cela calculons les valeurs des quantités

$$(y' z'' - z' y''), \quad (z' x'' - x' z''), \quad (x' y'' - y' x'');$$

il vient

$$\begin{aligned} y' z'' - z' y'' &= U' u^{-(2+\frac{K}{g})} \frac{C_1 - 2C_2}{2}, \\ z' x'' - x' z'' &= U' u^{-(2+\frac{K}{g})} \frac{C_1 - 2C_2}{2}, \\ x' y'' - y' x'' &= 0. \end{aligned}$$

Ce calcul nous montre que la courbe est plane et située dans un plan vertical.

Proposons-nous de reconnaître la forme de cette courbe; pour cela supposons que les constantes aient des valeurs telles que $C_1 + 2C_2$ soit nul, alors le plan sera parallèle au plan xOz ; il nous suffira de faire

$$C_2 = -\frac{C_1}{2}.$$

Au lieu de calculer directement x, y, z , il est plus simple de calculer leurs dérivées x', y', z' et d'intégrer; en tenant compte des valeurs trouvées, il vient

$$\begin{aligned} x' &= u^{-\frac{K}{g}} C_1 \left(\frac{1-u^2}{2u} + \frac{u}{2} + \frac{1}{2u} \right) = C_1 u^{-(1+\frac{K}{g})}, \\ y' &= 0, \\ z' &= \frac{C_1}{2} u^{-\frac{K}{g}} \left(1 - \frac{1}{u^2} \right). \end{aligned}$$

D'où, par intégration, nous déduisons

$$\begin{aligned} x &= -\frac{C_1 g}{K} u^{-\frac{K}{g}} + a, \\ y &= C_3, \\ z &= \frac{C_1 g}{2} u^{-\frac{K}{g}} \left[\frac{u}{g-K} + \frac{1}{u(K+g)} \right] + b, \end{aligned}$$

a, b, C_3 étant des constantes arbitraires.

Telle est la courbe dont les équations, en éliminant u , sont

$$y = C_3,$$

$$z - b = -\frac{K}{2}(x - a) \left\{ \left[\frac{K(x - a)}{-C_1 g} \right]^{-\frac{g}{K}} \frac{1}{g - K} + \left[\frac{(x - a)K}{-C_1 g} \right]^{\frac{g}{K}} \frac{1}{K + g} \right\}.$$

Supposons, par exemple, le cas particulier suivant :

$$K = 2g, \quad a = 0, \quad b = 0, \quad C_1 = -2.$$

Les équations de la courbe sont alors

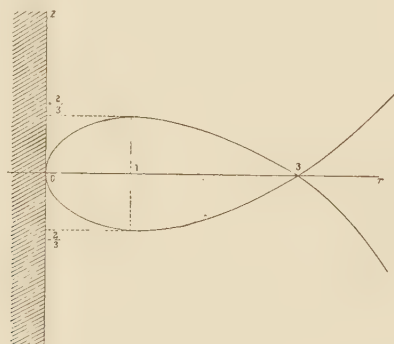
$$x = u^{-2},$$

$$y = C_3,$$

$$z = -u^{-2} \left(-u + \frac{1}{3u} \right).$$

On obtient ainsi une courbe qui a la forme indiquée, dont la construction se fait par la méthode ordinaire.

Fig. 1.



8. *Cas du fil hétérogène.* — Supposons toujours que les forces extérieures agissant sur le fil, ou tout au moins les deux composantes Φ et Ψ , ne dépendent que de x , y , z et u , et par conséquent que de u . Nous nous plaçons toujours dans le cas du repos apparent; les équations du mouvement sont alors

$$X = 0,$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ m \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 - m\rho\Psi \right\} + U' \left(\Phi + \frac{d^2 D_1}{dt^2} \right) = 0,$$

$$T = m \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 - m\rho\Psi.$$

Comme nous supposons le fil hétérogène, nous avons

$$m = f(s) = f(D) = f(D_1 + U);$$

d'où

$$\frac{\partial m}{\partial u} = U' f'(D_1 + U).$$

Les équations deviennent

$$X = 0, \\ \left(\frac{dD_1}{dt}\right)^2 U' \frac{f'}{f} - U' \frac{f'}{f} \rho \Psi - \frac{\partial}{\partial u} (\rho \Psi) = U' \Phi + U' \frac{d^2 D_1}{dt^2}.$$

Il faut chercher à vérifier cette dernière équation en mettant pour U et C des fonctions de u et pour D_1 une fonction de t .

Le problème pourra avoir une solution ou n'en pas avoir suivant la forme de la fonction f .

Si $\frac{f'}{f}$ est une fonction rationnelle de s , l'équation serait une relation de la forme

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 + \dots = 0,$$

on pourrait lui appliquer les considérations développées au paragraphe 5 du Mémoire de M. Appell (1).

Supposons que la fonction $\frac{f'}{f}$ soit une constante c , c'est-à-dire qu'on ait

$$m = e^{c(s-s_0)}.$$

L'équation devient alors

$$c U' \left(\frac{dD_1}{dt}\right)^2 + U' \frac{d^2 D_1}{dt^2} + U' (\Phi - c \rho \Psi) - \frac{\partial}{\partial u} (\rho \Psi) = 0.$$

Cette équation est presque identique à celle obtenue par M. Appell; appliquons les considérations sur les relations $A_1 T_1 + \dots = 0$, et interprétons les résultats.

Posons

$$A_1 = U', \quad A_2 = U' (\Phi - c \rho \Psi) - \frac{\partial}{\partial u} (\rho \Psi), \\ T_1 = c \left(\frac{dD_1}{dt}\right)^2 + \frac{d^2 D_1}{dt^2}, \quad T_2 = 1.$$

(1) P. APPELL, *Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe* (*Acta mathematica*, t. XII).

L'équation s'écrit

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 = 0.$$

Les fonctions A_1 et A_2 ne peuvent être linéairement indépendantes, car il faudrait que les fonctions T_1 et T_2 soient nulles et T_2 est égal à l'unité. Il existe donc au moins une relation linéaire, homogène, à coefficients constants entre A_1 et A_2 , et il ne peut en exister qu'une, car on aurait

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0,$$

ce qui est impossible, car $A_1 = U'$ qui n'est pas nul.

La façon la plus générale de satisfaire à l'équation considérée est de supposer qu'il existe une relation linéaire à coefficients constants entre les deux fonctions A_1 et A_2 , c'est-à-dire de supposer qu'on a

$$\frac{A_1}{K_1} = \frac{A_2}{K_2};$$

nous aurons alors

$$K_1 T_1 + K_2 T_2 = 0.$$

La figure permanente du fil est donnée par les deux équations

$$\begin{aligned} X &= 0, \\ K_1 U'(\Phi - c\rho\Psi) - K_1 \frac{\partial}{\partial u}(\rho\Psi) - K_2 U' &= 0. \end{aligned}$$

Quant à la vitesse de glissement, elle sera connue quand on connaîtra la fonction D_1 , qui est une intégrale de l'équation qui suit

$$K_1 c \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 + K_1 \frac{d^2 D_1}{dt^2} + K_2 = 0.$$

C'est une équation identique à celle obtenue par M. Appell dans le cas du plan fixe.

Si, comme lui, nous posons

$$K_2 = bc K_1,$$

il vient

$$c \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 D_1}{dt^2} + bc = 0;$$

on en tire $\frac{dD_1}{dt}$ par une tangente trigonométrique ou hyperbolique suivant que la constante b est positive ou négative.

Remarquons que nous avons aussi le cas particulier où l'on suppose

$$b = -K^2, \quad \frac{dD_1}{dt^2} = K;$$

le fil glisse avec une vitesse uniforme sur la courbe fixe.

Si b est nul, nous avons

$$\frac{dD_1}{dt} = \frac{1}{c(t-t_0)},$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}(\rho\Psi) - U'(\Phi - c\rho\Psi) &= 0, \\ X &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations sont analogues à celles d'équilibre.

Remarque. — Supposons que les forces extérieures, au lieu de dépendre seulement de u , soient fonctions de u et t , mais varient proportionnellement quand t seul varie; dans ce cas Φ, Ψ, X sont de la forme

$$\Phi = \theta_1 \Phi_1, \quad \Psi = \theta_1 \Psi_1, \quad X = \theta_1 X_1;$$

θ_1 dépendant seulement de t ; Φ_1, Ψ_1, X_1 seulement de u , les équations s'écrivent alors

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, \\ -\frac{1}{U'} \frac{\partial}{\partial u}(\rho\Psi_1) + \Phi_1 + \frac{d^2 D_1}{dt^2} \frac{1}{\theta_1} &= 0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons immédiatement

$$-\frac{d^2 D_1}{dt^2} \frac{1}{\theta_1} = K, \quad -\frac{1}{U'} \frac{\partial}{\partial u}(\rho\Psi) + \Phi - K = 0.$$

Cette dernière équation, jointe à la première, forme le système d'équations d'équilibre, en supposant que les forces extérieures ont pour composantes suivant les trois mêmes axes que nous avons toujours

considérés :

$$\Phi_1 = K, \quad \Psi_1, \quad X_1.$$

Quant à la vitesse de glissement v , c'est

$$v = -\frac{dD_1}{dt} = K \int_0^t \theta_1 dt.$$

Si le fil était hétérogène, le problème se traiterait de la même manière que dans le cas précédent où les forces dépendaient seulement de u , mais il faudra remplacer $\left(\frac{dD_1}{dt}\right)^2$ par $\left(\frac{dD_1}{dt}\right)^2 \frac{1}{\theta_1}$ et $\frac{d^2 D_1}{dt^2}$ par $\frac{d^2 D_1}{dt^2} \frac{1}{\theta_1}$.

9. Supposons que, sous l'action des forces extérieures, le fil se meuve en conservant une figure permanente; dans ce cas nous avons vu que la fonction C ne dépend point de t , quant à D elle est égale à $D_1 + U$; la vitesse de glissement est $-\frac{dD_1}{dt}$; les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned} X &= 0, \\ T &= m \left\{ \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 - \rho \Psi \right\}, \\ \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} + U' \left(\Phi + \frac{d^2 D_1}{dt^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Remarquons que la vitesse de glissement ne dépend point de u ⁽¹⁾. Supposons que les composantes Φ et Ψ ne dépendent que du temps t , supposons aussi le fil homogène; les équations deviennent :

$$\begin{aligned} X &= 0, \\ -\Psi \frac{\partial \rho}{\partial u} + U' \left(\Phi + \frac{d^2 D_1}{dt^2} \right) &= 0, \\ T &= m \left\{ \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 - \rho \Psi \right\}. \end{aligned}$$

Nous voyons ainsi que si Ψ est différent de zéro, nous avons, K étant

⁽¹⁾ Et par conséquent point de s . C'est un des énoncés de M. Léauté.

une constante,

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = KU', \quad K\Psi - \left(\Phi + \frac{d^2 D_1}{dt^2} \right) = 0.$$

D'où, par intégration,

$$-\frac{dD_1}{dt} = \int_0^t (\Phi - K\Psi) dt,$$

$$\rho = KU + K'.$$

La première donne la vitesse de glissement; la seconde peut s'écrire, puisque U est égal à s à une constante par rapport à u près,

$$\rho = Ks + K_1,$$

K_1 étant une constante par rapport à u .

Telle est la condition que doivent remplir les courbes, figures permanentes.

Remarquons que si Ψ est nul, c'est-à-dire si la force a sa ligne d'application suivant la tangente, la courbe est complètement arbitraire; quant à la vitesse de glissement, c'est

$$-\frac{dD_1}{dt} = -\int_0^t \Phi dt.$$

La tension est donnée par

$$T = m \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2.$$

Nous arrivons donc au résultat suivant, généralisation de celui obtenu par M. Floquet dans une Note à l'Académie des Sciences sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe (1^{er} avril 1889) :

Lorsque les composantes Φ et Ψ des forces extérieures appliquées à un élément de fil homogène dépendent seulement du temps et que le fil se meut en conservant une forme permanente, si la résultante de ces forces extérieures n'est pas dirigée suivant la tangente, c'est-à-dire si Ψ n'est pas nul, cette forme permanente est une courbe telle qu'on ait

$$\rho = Ks + K_1.$$

Si Ψ est nul, la ligne de repos apparent est quelconque, mais sur toutes ces courbes la vitesse de glissement et la tension sont à chaque instant les mêmes pour une même vitesse initiale de glissement.

Remarquons que si Ψ est différent de zéro et que la ligne de repos apparent soit une hélice elle est tracée sur un cylindre de base par une spirale logarithmique.

Remarque. — Si nous supposons que les composantes Φ et Ψ soient indépendantes de u et de t et soient par conséquent des constantes, nous obtenons un énoncé qui emprunte chacune de ses parties dans ceux obtenus aux paragraphes 6 et 9. La vitesse de glissement est proportionnelle au temps, et le rayon de courbure de la forme permanente est proportionnelle à l'arc.

10. Revenons maintenant au cas du fil hétérogène et supposons, comme au paragraphe 8, que le fil soit hétérogène de telle manière qu'on ait

$$m = f(s) \quad \text{et} \quad \frac{f'}{f} = c,$$

c étant une constante.

Supposons en outre que les composantes Φ et Ψ ne dépendent que du temps; nous aurons, en nous reportant aux calculs faits au paragraphe 8, l'équation

$$cU' \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 - cU' \rho \Psi - \frac{\partial \rho}{\partial u} \Psi + U' \left(\Phi + \frac{d^2 D_1}{dt^2} \right) = 0.$$

Il faut vérifier cette équation en mettant pour U et C des fonctions de u et pour D_1 une fonction de t .

Posons

$$\begin{aligned} A_1 &= U', & A_2 &= c\rho U' + \frac{\partial \rho}{\partial u}, \\ T_1 &= c \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 D_1}{dt^2} + \Phi, & T_2 &= -\Psi. \end{aligned}$$

La relation s'écrira

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 = 0.$$

1° Les A ne peuvent être nuls tous deux.

2° Les A sont liés par une relation linéaire et homogène à coefficients constants

$$\lambda A_1 + \mu A_2 = 0.$$

Cette relation s'écrit

$$\lambda U' + \mu \left(c\rho U' + \frac{\partial \rho}{\partial u} \right) = 0.$$

Elle nous donne une condition à laquelle doit satisfaire la forme permanente du fil.

Quant à la vitesse de glissement elle est donnée par l'équation

$$\mu \left[c \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 D_1}{dt^2} + \Phi \right] + \lambda \Psi = 0.$$

Un cas particulier intéressant est celui où l'on a

$$c\rho U' + \frac{\partial \rho}{\partial u} = 0$$

ou bien

$$\rho = e^{-cs+c_1}.$$

Le rayon de courbure s'exprime par cette fonction de l'arc, la vitesse de glissement est donnée par l'équation

$$c \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 D_1}{dt^2} + \Phi = 0.$$

Le mouvement est le même quelle que soit la fonction de $t \Psi$; c'est le cas du mouvement de repos apparent d'un fil ayant une figure permanente telle que

$$\rho = e^{-cs+c_1},$$

le fil étant hétérogène de telle manière qu'on a

$$\frac{\frac{\partial m}{\partial s}}{m} = c,$$

les composantes Φ et Ψ dépendant uniquement du temps.

Remarquons que, si Ψ est nul, nous avons encore pour déter-

miner le glissement la relation

$$c \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 D_1}{dt^2} + \Phi = 0,$$

mais la forme du fil est quelconque ⁽¹⁾.

Nous voyons que dans le cas du fil hétérogène l'énoncé des résultats obtenus, en supposant Φ et Ψ fonctions de t seulement, diffère suivant que la composante normale principale Ψ est nulle ou différente de zéro, comme dans le cas du fil homogène.

11. Pour terminer, cherchons de quelle manière la masse doit être répartie dans un fil inextensible pour qu'il ait une figure permanente et qu'il glisse sur elle, sans qu'aucune force n'agisse sur ce fil. Les équations du mouvement de repos apparent s'écrivent dans ce cas

$$T = m \left[\frac{dD_1}{dt} \right]^2,$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} + U' \frac{d^2 D_1}{dt^2} = 0;$$

en égalant les valeurs de $\frac{\partial T}{\partial u}$, il vient

$$\frac{\partial m}{\partial u} \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 + m U' \frac{d^2 D_1}{dt^2} = 0.$$

Si $\frac{dD_1}{dt}$ est nul nous sommes ramenés à une question d'équilibre; si $\frac{\partial m}{\partial u}$ l'est le fil est homogène; nous supposons donc ces deux quantités différentes de zéro; nous aurons donc, k étant une constante,

$$\frac{\frac{\partial m}{\partial u}}{m U'} = k, \quad - \frac{\frac{d^2 D_1}{dt^2}}{\left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2} = k;$$

(1) La loi de répartition de la masse étant telle que

$$m = e^{C(s-s_0)}.$$

ce qui nous donne, pour loi de répartition de la masse,

$$m = e^{k s - s_0},$$

pour vitesse de glissement,

$$-\frac{dD_1}{dt} = \frac{-1}{kt + k'}.$$

IV.

Problème.

12. Proposons-nous le problème suivant :

Chercher s'il existe un mouvement d'un fil inextensible pouvant se représenter par le glissement du fil le long d'une courbe de forme invariable, animée d'un mouvement de translation, et déterminer ce mouvement s'il existe.

Dans cette hypothèse, les coordonnées d'un point du fil doivent chacune être la somme d'une fonction de u et d'une fonction de t . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les dérivées secondes $\frac{\partial x'}{\partial t}, \frac{\partial y'}{\partial t}, \frac{\partial z'}{\partial t}$ soient nulles toutes trois.

Nous avons donc les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial t} &= \frac{1-u^2}{2} \left(\frac{\partial C'''}{\partial t} + \frac{\partial D''}{\partial t} \right) - u \frac{\partial D'}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial y'}{\partial t} &= i \left\{ \frac{1+u^2}{2} \left(\frac{\partial C'''}{\partial t} + \frac{\partial D''}{\partial t} \right) + u \frac{\partial D'}{\partial t} \right\} = 0, \\ \frac{\partial z'}{\partial t} &= u \left(\frac{\partial C'''}{\partial t} + \frac{\partial D''}{\partial t} \right) + \frac{\partial D'}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

Si nous formons la quantité $x' \frac{\partial x'}{\partial t} + y' \frac{\partial y'}{\partial t} + z' \frac{\partial z'}{\partial t}$, cette expression a pour valeur $D' \frac{\partial D'}{\partial t}$; nous avons donc la relation

$$D' \frac{\partial D'}{\partial t} = 0.$$

D'où nous déduisons, comme D' n'est pas nul,

$$\frac{\partial D'}{\partial t} = 0;$$

ce qui nous donne pour D une forme analogue à celle obtenue dans le cas du repos apparent :

$$D = U + D_1.$$

Nos trois équations deviennent alors :

$$\begin{aligned} \frac{1-u^2}{2} \frac{\partial C'''}{\partial t} &= 0, \\ i \left\{ \frac{1+u^2}{2} \frac{\partial C'''}{\partial t} \right\} &= 0, \\ u \frac{\partial C'''}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

D'où nous tirons

$$\frac{\partial C'''}{\partial t} = 0.$$

Les fonctions $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ étant des fonctions de t seulement, U , fonction de u seul, C est de la forme

$$C = U_1 + \theta_1 \frac{u^2}{2} + \theta_2 u + \theta_3,$$

puis

$$D = U + D_1.$$

Telles sont les termes des fonctions C et D dans l'hypothèse actuelle.

Écrivons alors les expressions de x, y, z, s :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-u^2}{2} (U_1'' + U') + u U_1' - U_1 + \frac{\theta_1}{2} - \theta_3, \\ y &= i \left\{ \frac{1+u^2}{2} (U_1'' + U') - u U_1' + U_1 + \frac{\theta_1}{2} + \theta_3 \right\}, \\ z &= u (U_1' + U') - U_1 - \theta_2, \\ s &= D_1 + U. \end{aligned}$$

Les fonctions U_1 et U nous donneront la forme de la courbe ; θ_1 , θ_2 et θ_3 nous donneront la translation.

Voyons l'expression de la vitesse d'un point du fil, ainsi que ses composantes suivant le trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale :

$$\begin{aligned}\alpha \frac{dx}{dt} + \beta \frac{dy}{dt} + \gamma \frac{dz}{dt} &= \alpha \frac{\partial x}{\partial t} + \beta \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \alpha' \frac{dx}{dt} + \beta' \frac{dy}{dt} + \gamma' \frac{dz}{dt} &= \alpha' \frac{\partial x}{\partial t} + \beta' \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial z}{\partial t}, \\ \alpha'' \frac{dx}{dt} + \beta'' \frac{dy}{dt} + \gamma'' \frac{dz}{dt} &= \alpha'' \frac{\partial x}{\partial t} + \beta'' \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma'' \frac{\partial z}{\partial t}.\end{aligned}$$

Ces formules nous montrent que la vitesse d'un point du fil est la résultante d'une vitesse de composantes suivant les trois axes fixes $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ et d'une vitesse dirigée suivant la tangente et égale à $-\frac{d\mathbf{D}_1}{dt}$.

La première sera la vitesse de translation de composantes :

$$\frac{d\theta_1}{dt} \frac{1}{2} - \frac{d\theta_3}{dt}, \quad i \left\{ \frac{d\theta_1}{dt} \frac{1}{2} + \frac{d\theta_3}{dt} \right\}, \quad -\frac{d\theta_2}{dt};$$

la seconde sera la vitesse de glissement du fil sur la courbe fixe.

Voyons les équations du mouvement et l'expression de la tension. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= m \left\{ \left[\frac{d\mathbf{D}_1}{dt} \right]^2 + \mathbf{U}' \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \frac{u^2}{2} + \frac{d^2\theta_2}{dt^2} u + \frac{d^2\theta_3}{dt^2} \right) - \rho (\Psi + i\mathbf{X}) \right\}, \\ \frac{1}{m} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u} &+ \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \frac{u^2}{2} + \frac{d^2\theta_2}{dt^2} u + \frac{d^2\theta_3}{dt^2} \right) (\mathbf{U}_1''' + \mathbf{U}'') \\ &+ \mathbf{U}' \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2} u + \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{D}_1}{dt^2} \right) + \mathbf{U}' \Phi = 0, \\ \frac{i\mathbf{U}^3 \mathbf{X}}{\rho} - \mathbf{U}^2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} - \mathbf{U}' (\mathbf{U}_1'' + \mathbf{U}'') &\left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2} u + \frac{d^2\theta_2}{dt^2} \right) \\ &- \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \frac{u^2}{2} + \frac{d^2\theta_2}{dt^2} u + \frac{d^2\theta_3}{dt^2} \right) [(\mathbf{U}_1''' + \mathbf{U}'') (\mathbf{U}_1''' + 2\mathbf{U}'') - \mathbf{U}' (\mathbf{U}_1'' + \mathbf{U}''')] = 0.\end{aligned}$$

13. Supposons que le fil soit homogène, c'est-à-dire que m soit une

constante; remplaçons la tension par sa valeur dans les équations du mouvement, il vient

$$\begin{aligned} & (U_1''' + 2 U'') \left(\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \frac{u^2}{2} + \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} u + \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} \right) \\ & + 2 U' \left(\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} u + \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} \right) + U' \left(\frac{d^2 D_1}{dt^2} + \Phi \right) - \frac{\partial}{\partial u} \{ \rho (\Psi + iX) \} = 0. \end{aligned}$$

Supposons, comme précédemment, que les forces extérieures dont les composantes sont Φ, Ψ, X ne dépendent que du paramètre u ; nous pouvons écrire cette équation comme il suit

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \left[\frac{u^2}{2} (U_1''' + 2 U'') + 2 u U' \right] + \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} [u (U_1''' + 2 U'') + 2 U'] \\ & + \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} (U_1''' + 2 U'') + U' \Phi - \frac{\partial}{\partial u} \{ \rho (\Psi + iX) \} + U' \frac{d^2 D_1}{dt^2} = 0. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{u^2}{2} (U_1''' + 2 U'') + 2 u U', \\ A_2 &= u (U_1''' + 2 U'') + 2 U', \quad A_3 = U_1''' + 2 U'', \\ A_4 &= U' \Phi - \frac{\partial}{\partial u} \{ \rho (\Psi + iX) \}, \quad A_5 = U'; \\ T_1 &= \frac{d^2 \theta_1}{dt^2}, \quad T_2 = \frac{d^2 \theta_2}{dt^2}, \quad T_3 = \frac{d^2 \theta_3}{dt^2}, \quad T_4 = 1, \quad T_5 = \frac{d^2 D_1}{dt^2}. \end{aligned}$$

L'équation s'écrit alors

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 + A_3 T_3 + A_4 T_4 + A_5 T_5 = 0.$$

Il faut mettre pour les A des fonctions de u , pour les T des fonctions de t , de telle sorte que cette relation ait lieu quels que soient u et t .

1° Tous les T ne peuvent être nuls, car $T_4 = 1$.

2° Supposons qu'il y ait une relation linéaire et homogène entre les A , soit

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 + k_5 A_5 = 0.$$

Nous en déduisons les relations suivantes :

$$\frac{\frac{d^2 \theta_1}{dt^2}}{k_1} = \frac{\frac{d^2 \theta_2}{dt^2}}{k_2} = \frac{\frac{d^2 \theta_3}{dt^2}}{k_3} = \frac{1}{k_4} = \frac{\frac{d^2 D_1}{dt^2}}{k_5}.$$

D'où nous déduisons

$$\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = k_1, \quad \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = k_2, \quad \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} = k_3, \quad \frac{d^2 D_1}{dt^2} = k_4.$$

Le mouvement de translation est un mouvement uniformément accéléré, ainsi que le glissement sur la courbe invariable. Voyons alors ce que deviennent les équations qui nous donnent la forme de la courbe. C'est d'abord

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 + k_5 A_5 = 0,$$

puis l'équation

$$\begin{aligned} \frac{iU'^3}{\rho} X - K_1 \left[U'^2 - u U' (U_1''' + U'') \right. \\ \left. + \frac{u^2}{2} (U_1''' + U'') (U_1''' + 2U'') - \frac{u^2}{2} U' (U_1'' + U''') \right] \\ - K_2 [u U' (U_1'' + U''') - u (U_1'' + U'') (U_1'' + 2U'') - U' (U_1'' + U''')] \\ + K_3 [U' (U_1'' + U''') - (U_1'' + U'') (U_1'' + 2U'')] = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{K_1}{2} - K_3 \right) \left[\frac{1-u^2}{2} (U_1'' + U'') (U_1'' + 2U'') - \frac{1+u^2}{2} U' (U_1'' + U''') \right. \\ \left. - u U' (U_1'' + U''') - U'^2 \right] \\ + \left(\frac{K_1}{2} + K_3 \right) \left[-\frac{1+u^2}{2} (U_1'' + U'') (U_1'' + 2U'') + \frac{1+u^2}{2} U' (U_1'' + U''') \right. \\ \left. - u U' (U_1'' + U''') - U'^2 \right] \\ + K_2 [u U' (U_1'' + U''') - u (U_1'' + U'') (U_1'' + 2U'') - U' (U_1'' + U''')] + \frac{iU'^3}{\rho} X = 0. \end{aligned}$$

Ce qui peut encore se mettre sous la forme

$$X - \alpha'' \left(\frac{K_1}{2} - K_3 \right) - i\beta'' \left(\frac{K_1}{2} + K_3 \right) + \gamma'' K_2 = 0.$$

Reprenons les autres équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{T}{m\rho} + \Psi = \frac{\rho}{D'^2} & \left\{ (C''' + 2D'')^2 \left(\frac{\partial D}{D'} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^2 \frac{C'' + D''}{D'} + 2 \frac{\partial D}{\partial t} \left(\frac{\partial C''}{\partial t} + \frac{\partial D''}{\partial t} \right) \right. \\ & - 2 \frac{\partial D}{\partial t} \frac{\partial D'}{\partial t} \frac{C'' + D''}{D'} - \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} (C'' + D'') - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C'' + D'') \\ & \left. - D' \left(\frac{\partial^2 C''}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D''}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \frac{(C'' + D'') D''}{D'} - \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)^2 \frac{D''}{D'^2} \right\}, \\ \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} + D' \Phi + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (C'' + D'') + D' \left(\frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} \right) & = 0. \end{aligned}$$

Ces équations deviennent, en tenant compte des expressions de C et D trouvées pour le problème que nous traitons,

$$\begin{aligned} \frac{T}{m} &= \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 - \rho \left[\Psi - \alpha' \left(\frac{K_1}{2} - K_3 \right) - i\beta' \left(\frac{K_1}{2} + K_3 \right) + \gamma' K_2 \right], \\ \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} + U' & \left[\Phi - \alpha \left(\frac{K_1}{2} - K_3 \right) - i\beta \left(\frac{K_1}{2} + K_3 \right) + \gamma K_2 + \frac{d^2 D_1}{dt^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Considérons une force dont les composantes suivant les trois axes fixes de coordonnées Ox , Oy , Oz soient

$$\frac{K_1}{2} - K_3, \quad i \left(\frac{K_1}{2} + K_3 \right), \quad -K_2.$$

Appelons φ , ψ , χ ses composantes suivant le trièdre mobile dont il a été déjà souvent question. Les équations s'écrivent alors

$$\begin{aligned} X - \chi &= 0, \quad \frac{T}{m} = \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 - \rho (\Psi - \psi), \\ \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} + U' & (\Phi - \varphi + K_3). \end{aligned}$$

Posons

$$X - \chi = X_1, \quad \Psi - \psi = \Psi_1, \quad \Phi - \varphi + K_3 = \Phi_1;$$

il vient ainsi

$$\begin{aligned} X_1 = 0, \quad T = m \left[\left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 - \rho \Psi_1 \right], \\ \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} + U' \Phi_1 = 0. \end{aligned}$$

ou bien

$$X_1 = 0, \quad \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial u} (\rho \Psi_1) = U' \Phi_1.$$

Ce sont les équations d'équilibre; donc la forme du fil, dans ce cas, est la position d'équilibre du fil supposé soumis aux forces données, diminuées des forces de composantes, suivant les trois axes fixes Ox , Oy , Oz , égales à $\frac{K_1}{2} - K_3$, $i \left(\frac{K_1}{2} + K_3 \right)$, $-K_2$ et d'une force tangentielle égale à $-K_5$.

3° A côté de la solution générale précédente qui convient, quelles que soient les expressions de Φ , Ψ , X en fonction de u , il peut s'en présenter d'autres pour des lois particulières de forces; nous les trouverons en supposant qu'il existe, entre les fonctions A , deux relations linéaires et homogènes distinctes, à coefficients constants, au lieu d'une seule :

$$\begin{aligned} k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 + k_5 A_5 = 0, \\ h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3 + h_4 A_4 + h_5 A_5 = 0. \end{aligned}$$

De ces relations nous pouvons tirer deux des fonctions A en fonction des trois autres. Ces relations nous donnent d'ailleurs les deux fonctions U et U_1 qui déterminent la forme du fil en fonction des forces extérieures

$$\begin{aligned} A_1 = E_1 A_3 + E_2 A_4 + E_3 A_5, \\ A_2 = G_1 A_3 + G_2 A_4 + G_3 A_5. \end{aligned}$$

Pour déterminer le mouvement, remplaçons A_1 et A_2 par leurs valeurs dans les équations du mouvement; il vient alors

$$\begin{aligned} (E_1 A_3 + E_2 A_4 + E_3 A_5) T_1 + (G_1 A_3 + G_2 A_4 + G_3 A_5) T_2 \\ + A_3 T_3 + A_4 T_4 + A_5 T_5 = 0, \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$A_3(E_1 T_1 + G_1 T_2 + T_3) + A_4(E_2 T_1 + G_2 T_2 + T_4) + A_5(E_3 T_1 + G_3 T_2 + T_5) = 0.$$

Comme les A sont indépendants, nous déduisons de cette relation ce

qui suit :

$$E_1 T_1 + G_1 T_2 + T_3 = 0,$$

$$E_2 T_1 + G_2 T_2 + T_4 = 0,$$

$$E_3 T_1 + G_3 T_2 + T_5 = 0.$$

Revenons maintenant à la dernière équation du mouvement; elle peut s'écrire

$$B_1 T_1 + B_2 T_2 + B_3 T_3 + B_4 T_4 = 0.$$

Dans cette relation, les T sont les mêmes que précédemment; quant aux B , ils ont les valeurs indiquées :

$$B_1 = -U'^2 - u U' (U_1''' + U'') - \frac{u^2}{2} [(U_1''' + U'') (U_1''' + 2U'') - U' (U_1'' + U'')],$$

$$B_2 = -U' (U_1''' + U'') - u [(U_1''' + U'') (U_1''' + 2U'') - U' (U_1'' + U'')],$$

$$B_3 = - (U_1''' + U'') (U_1''' + 2U'') + U' (U_1'' + U''),$$

$$B_4 = i \frac{U^{1/3} \Lambda}{\rho}.$$

Or, les quantités T_1, T_2, T_3, T_4 sont liées par les relations

$$E_1 T_1 + G_1 T_2 + T_3 = 0,$$

$$E_2 T_1 + G_2 T_2 + T_4 = 0;$$

d'où nous tirons T_3 et T_4 ; en portant dans la relation, nous obtenons

$$B_1 T_1 + B_2 T_2 + B_3 (E_1 T_1 + G_1 T_2) + B_4 (E_2 T_1 + G_2 T_2) = 0.$$

Comme les T sont maintenant indépendants dans cette nouvelle relation, nous en déduisons

$$B_1 - E_1 B_3 - E_2 B_4 = 0,$$

$$B_2 - G_1 B_3 - G_2 B_4 = 0.$$

Nous arrivons donc à cette conclusion dans ce cas : Les deux fonctions U et U_1 , qui une fois connues donnent la forme du fil, doivent satisfaire au système suivant :

$$A_1 = E_1 A_3 + E_2 A_4 + E_3 A_5,$$

$$A_2 = G_1 A_3 + G_2 A_4 + G_3 A_5,$$

$$B_1 = E_1 B_3 + E_2 B_4,$$

$$B_2 = G_1 B_3 + G_2 B_4.$$

Si ces quatre équations sont compatibles, c'est-à-dire si les forces données sont telles qu'elles satisfassent aux deux relations obtenues en éliminant U et U_1 entre ces quatre relations, la forme de la courbe est déterminée par la connaissance des deux fonctions U et U_1 .

Quant au mouvement il est donné par le système suivant :

$$E_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + G_1 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} = 0.$$

$$E_2 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + G_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + 1 = 0.$$

$$E_3 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + G_3 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + \frac{d^2 D_1}{dt^2} = 0,$$

qui nous donne trois des quantités θ_1 , θ_2 , θ_3 , D_1 , quand on s'en donne une arbitrairement.

En résumé, dans ce cas, pour que le mouvement soit possible, les forces données doivent satisfaire à deux conditions; le mouvement de translation est déterminé, si l'on se donne la vitesse de glissement sur la courbe.

4° Supposons qu'il existe trois relations linéaires et homogènes, distinctes à coefficients constants entre les fonctions A ; soient

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 + k_5 A_5 = 0,$$

$$h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3 + h_4 A_4 + h_5 A_5 = 0,$$

$$l_1 A_1 + l_2 A_2 + l_3 A_3 + l_4 A_4 + l_5 A_5 = 0.$$

De ces trois relations nous tirerons trois des fonctions A , par exemple A_1 , A_2 , A_3 :

$$(1) \quad \begin{cases} A_1 = E_1 A_4 + E_2 A_5, \\ A_2 = G_1 A_4 + G_2 A_5, \\ A_3 = H_1 A_4 + H_2 A_5. \end{cases}$$

Nous déduisons, en portant ces valeurs dans la relation qui lie les A aux T , en remarquant que les quantités A_4 et A_5 sont indépendantes, les relations suivantes :

$$E_1 T_1 + G_1 T_2 + H_1 T_3 + T_4 = 0,$$

$$E_2 T_1 + G_2 T_2 + H_2 T_3 + T_5 = 0.$$

De la première relation nous pouvons tirer T_1 ; en portant dans la relation qui lie les B aux T , il vient

$$(B_1 - B_4 E_1) T_1 + (B_2 - B_4 G_1) T_2 + (B_3 - B_4 H_1) T_3 = 0.$$

Comme T_1, T_2, T_3 sont indépendants, nous avons

$$(2) \quad \begin{cases} B_1 - B_4 E_1 = 0, \\ B_2 - B_4 G_1 = 0, \\ B_3 - B_4 H_1 = 0. \end{cases}$$

Les fonctions U et U_1 doivent satisfaire aux systèmes (1) et (2). Si ces six équations sont compatibles, c'est-à-dire si les forces données sont telles qu'elles satisfassent aux quatre relations obtenues en éliminant U et U_1 entre les six relations, la forme de la courbe figure du fil est déterminée par la connaissance des deux fonctions U et U_1 .

Quant au mouvement, il est donné par le système

$$\begin{aligned} E_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + G_1 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + H_1 \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} + 1 &= 0, \\ E_2 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + G_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + H_2 \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} + \frac{d^2 D_1}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

Si nous donnons arbitrairement deux des quatre quantités $\theta_1, \theta_2, \theta_3, D_1$, les deux autres sont déterminées.

5° Supposons qu'il existe quatre relations linéaires et homogènes, distinctes, à coefficients constants entre les A , nous en concluons qu'on a

$$(3) \quad \frac{A_1}{h_1} = \frac{A_2}{h_2} = \frac{A_3}{h_3} = \frac{A_4}{h_4} = \frac{A_5}{h_5}.$$

Nous en déduisons que, pour déterminer le mouvement, nous aurons l'unique relation

$$h_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + h_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + h_3 \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} + h_4 + h_5 \frac{d^2 D_1}{dt^2} = 0.$$

Si l'on se donne arbitrairement la translation, la vitesse de glissement en résultera.

Remarquons que, puisque les quantités T_1, T_2, T_3, T_4 sont indépendantes, il résulte qu'on a

$$(4) \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = 0.$$

Les fonctions U_1 et U qui donnent la forme du fil doivent vérifier les équations (3) et (4). Or les trois premières équations du système (4)

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0,$$

nous conduisent à cette conclusion que U' doit être nul, ce qui ne peut être; ce cas est donc impossible.

6° Supposons comme dernier cas que tous les A soient nuls; ce cas est impossible, car A_3 est égal à U' et U' ne peut être nul.

14. *Cas particulier.* — Existe-t-il un mouvement pouvant se représenter par le glissement du fil le long d'une hélice animée d'un mouvement de translation parallèle aux génératrices du cylindre correspondant.

Supposons tout d'abord que les génératrices du cylindre soient parallèles à l'axe Oz .

Nous avons vu que dans un mouvement de ce genre les fonctions C et D sont de la forme suivante :

$$C = U_1 + \theta_1 \frac{u^2}{2} + \theta_2 u + \theta_3, \\ D = U + D_1,$$

et alors les coordonnées d'un point du fil sont :

$$x = \frac{1+u^2}{2} (U_1'' + U') + u U_1' - U_1 + \frac{\theta_1}{2} - \theta_2, \\ y = i \left\{ \frac{1+u^2}{2} (U_1'' + U') - u U_1' + U_1 + \frac{\theta_1}{2} + \theta_3 \right\}, \\ z = u (U_1'' + U') - U_1' - \theta_2, \\ s = D_1 + U.$$

Nous déduisons, comme la translation est rectiligne et parallèle à Oz , qu'on a

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_3 = 0.$$

Exprimons maintenant que la courbe sur laquelle glisse le fil est une hélice tracée sur un cylindre de génératrices parallèles à Oz ; il vient ainsi

$$\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = K, \quad \text{avec} \quad |K| < 1,$$

ce qui s'écrit

$$u(U_1''' + U'') + U' = KU'.$$

En tenant compte de ces résultats, les équations du mouvement deviennent ce qui suit :

$$\begin{aligned} T &= m \left\{ \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 + u U' \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} - \rho (\Psi + iX) \right\}, \\ \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} + U' \Phi + KU' \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + U' \frac{d^2 D_1}{dt^2} &= 0, \\ \frac{iU' X}{\rho} - \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} \frac{K^2 - 1}{u} &= 0. \end{aligned}$$

Voyons la valeur du rayon de courbure ρ ; dans ces conditions, nous avons

$$\frac{U'^2}{\rho^2} = \frac{K^2 - 1}{u^2} \quad \text{et} \quad \frac{U'}{\rho} = \frac{i\sqrt{1 - K^2}}{u}.$$

Les équations du mouvement deviennent alors

$$\begin{aligned} T &= m \left\{ \left(\frac{d^2 D_1}{dt^2} \right)^2 - \rho \left[\Psi + i \left(X - \sqrt{1 - K^2} \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} \right) \right] \right\}, \\ \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} + U' \left(\Phi + K \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} \right) + U' \frac{d^2 D_1}{dt^2} &= 0, \\ X - \sqrt{1 - K^2} \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

Si nous posons

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi + K \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + \frac{d^2 D_1}{dt^2}, \\ \Psi_1 &= \Psi, \\ X_1 &= X - \sqrt{1 - K^2} \frac{d^2 \theta_2}{dt^2}, \end{aligned}$$

les équations du mouvement deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (m \rho \Psi_1) &= U' \Phi_1, \\ X_1 &= 0. \end{aligned}$$

Ce sont les équations d'équilibre; la forme du fil est donc la position d'équilibre du fil soumis à des forces extérieures transformées par l'adjonction d'une force verticale et d'une force tangentielle.

La vitesse a pour expression

$$v^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)^2 - 2 \frac{\partial D}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial t} x' + \frac{\partial y}{\partial t} y' + \frac{\partial z}{\partial t} z'\right),$$

ce qui fait ici

$$v^2 = \left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dD_1}{dt}\right)^2 + 2 \frac{dD_1}{dt} \frac{d\theta_2}{dt} K.$$

C'est une formule que nous aurions pu écrire directement sachant que la vitesse est la résultante de la vitesse de glissement et de celle de translation qui font entre elles un angle dont le cosinus est K.

Nous voyons que dans ce cas la vitesse ne dépend que du temps. Supposons donc que les forces extérieures ne dépendent que du temps. Ce cas comprend celui de M. Floquet qui suppose que ces forces ne dépendent que de la vitesse. (Note à l'Académie des Sciences, 25 juin 1900.)

L'équation

$$X - \sqrt{1-K^2} \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = 0$$

est une équation différentielle du second ordre en θ_2 . Cette équation étant intégrée, la translation est donc connue.

Supposons encore comme M. Floquet le fil homogène, il vient alors l'équation suivante :

$$-\frac{d\rho}{du} \Psi + U' \left(\Phi + K \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \frac{d^2D_1}{dt^2} \right) = 0.$$

Posons

$$A_1 = -\frac{d\rho}{du}, \quad A_2 = U',$$

$$T_1 = \Psi, \quad T_2 = \Phi + K \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \frac{d^2D_1}{dt^2}.$$

L'équation devient alors

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 = 0.$$

1° Supposons les T indépendants; alors on devrait avoir

$$\frac{d\rho}{du} = 0, \quad U' = 0,$$

ce qui est impossible.

2° Supposons que les T soient liés par une relation linéaire et homogène à coefficients constants,

$$K_1 T_1 + K_2 T_2 = 0;$$

alors nous en déduisons

$$-\frac{\frac{d\rho}{du}}{K_1} = \frac{U'}{K_2}.$$

Remarquons que la relation

$$K_1 T_1 + K_2 T_2 = 0$$

nous donne la vitesse de glissement du fil sur la courbe, la translation ayant été déterminée par l'intégration d'une équation différentielle du second ordre.

Nous avons vu qu'on a dans ce cas

$$\rho = \frac{u U'}{i \sqrt{1 - K^2}},$$

d'où

$$\frac{d\rho}{du} = \frac{u U'' + U'}{i \sqrt{1 - K^2}}.$$

En remplaçant ρ par sa valeur, nous avons donc l'équation différentielle

$$i \sqrt{1 - K^2} K_1 U' + K_2 (u U'' + U') = 0.$$

C'est une équation différentielle du second ordre en U; l'intégrale première s'écrit, C_1 étant une constante arbitraire,

$$U' = C_1 u^{-\frac{i K_1 \sqrt{1 - K^2} + K_2}{K_2}}.$$

Voyons l'expression de l'arc de la section droite σ :

$$\left(\frac{d\sigma}{du}\right)^2 = x'^2 + y'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - z'^2 = U'^2 (1 - K^2);$$

d'où

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{1 - K^2} U' du, \\ \sigma - \sigma_0 &= \sqrt{1 - K^2} U. \end{aligned}$$

Quant à l'expression du rayon de courbure ρ_1 de la section droite, elle est fournie par la relation

$$\frac{(x'^2 + y'^2)^3}{\rho_1^2} = (x' y'' - y' x'')^2.$$

Comme on a

$$\begin{aligned} x' &= U' \left[\frac{K-1}{2u} - u \frac{K+1}{2} \right], \\ y' &= i U' \left[\frac{K-1}{2u} + u \frac{K+1}{2} \right], \\ x'' &= U'' \left[\frac{K-1}{2u} - u \frac{K+1}{2} \right] - U' \left[\frac{K-1}{2u^2} + \frac{K+1}{2} \right], \\ y'' &= i \left\{ U'' \left[\frac{K-1}{2u} + u \frac{K+1}{2} \right] - U' \left[\frac{K-1}{2u^2} - \frac{K+1}{2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

nous en déduisons

$$\begin{aligned} \frac{U'^2 (1 - K^2)^3}{\rho_1^2} &= \frac{(1 - K^2)^2}{u^2}, \\ \rho_1 &= -iu U' \sqrt{1 - K^2} = \frac{K_1}{K_2} (1 - K^2) U, \\ \rho_1 &= \frac{K_1}{K_2} \sqrt{1 - K^2} (\sigma - \sigma_0); \end{aligned}$$

c'est l'équation intrinsèque d'une spirale logarithmique.

3° A côté de la solution générale précédente, il peut s'en présenter d'autres pour des lois particulières de forces; supposons qu'on ait

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0,$$

ce qui s'écrit

$$\Psi = 0, \quad \Phi + K \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + \frac{d^2 D_1}{dt^2} = 0.$$

Dans ce cas les quantités $\frac{d\rho}{du}$ et U' sont arbitraires. La section droite du cylindre est arbitraire.

Le mouvement est donné par les équations

$$\begin{aligned} X - \sqrt{1-K^2} \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} &= 0, \\ \Phi - K \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + \frac{d^2 D_1}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

Remarquons que, dans le cas particulier où il n'y a pas de forces agissant sur le fil, la vitesse de translation et celle de glissement sont des constantes.

Le mouvement de translation est uniforme ainsi que le glissement du fil sur la courbe animée du mouvement de translation uniforme.

Nous arrivons donc au résultat suivant :

Le mouvement considéré existe d'une infinité de manières. Quand la composante des forces extérieures Ψ n'est pas nulle, il se produit sur un cylindre ayant pour section droite une spirale logarithmique qui peut se réduire à une circonférence.

Si Ψ est nul, il est possible sur un cylindre à une section quelconque.

L'hélice est elle-même arbitraire sur le cylindre.

De plus la translation ne peut être uniforme que si la composante X est nulle; la vitesse de translation est donc une constante arbitraire; comme on peut la choisir nulle, on voit que, quand la composante X est nulle, il existe toujours une figure de repos apparent qui est une hélice cylindro-conique quelconque.

Nous arrivons ainsi aux mêmes résultats que M. Floquet dans sa Note à l'Académie des Sciences.

D'ailleurs, si nous posons

$$K = \cos i, \quad u = -\frac{dD_1}{dt}, \quad w = -\frac{d\theta_2}{dt},$$

nos équations deviennent

$$\begin{aligned} X + \sin i \frac{dw}{dt} &= 0, \quad \frac{T}{m} = u^2 - \rho \Psi, \\ \frac{1}{m} \frac{1}{U} \frac{\partial T}{\partial u} + \Phi - \cos i \frac{dw}{dt} - \frac{du}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Ce sont les équations de M. Floquet.

V.

Problème.

15. Proposons-nous de chercher si le mouvement représenté par le glissement du fil sur une courbe qui se déplace en restant homothétique à elle-même par rapport à l'origine est possible et de quelle manière.

Cherchons tout d'abord les conditions que doivent remplir les fonctions de u et t , C et D , pour que la courbe définie par le système suivant reste, quand t varie, homothétique à elle-même par rapport à l'origine :

$$\begin{aligned}x &= \frac{1-u^2}{2}(C'' + D') + uC' - C, \\y &= i \left\{ \frac{1+u^2}{2}(C'' + D') - uC' + C \right\}, \\z &= u(C'' + D') - C', \\s &= D.\end{aligned}$$

Soient $x_1, y_1, z_1, s_1, C_1, D_1$ les coordonnées d'un point du fil à l'instant initial $t = 0$ et les expressions des fonctions de u, C et D définissant la forme du fil à ce même instant.

Si nous désignons par θ le rapport d'homothétie que nous supposons ne pas être constant, car alors nous retomberions sur l'étude du repos apparent, nous devons avoir

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = \theta,$$

ce qui s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} &= \frac{x + \frac{y}{i}}{x_1 + \frac{y_1}{i}} = \frac{C'' + D'}{C_1'' + D_1'} = \frac{u(C'' + D') - z}{u(C_1'' + D_1') - z_1} = \frac{C'}{C_1'} = \\&= \frac{\frac{1-u^2}{2}(C'' + D') + uC' - x}{\frac{1-u^2}{2}(C_1'' + D_1') + uC_1' - x_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D'}{D_1'} = \theta.\end{aligned}$$

Donc les fonctions C et D ont les formes suivantes, C_1 et D_1 étant les fonctions C et D de M. de Montcheuil définissant la courbe forme du fil à l'instant initial $t = 0$, θ étant une fonction de t désignant le rapport d'homothétie, θ_1 une fonction de t :

$$\begin{aligned} C &= \theta C_1, \\ D &= \theta D_1 + \theta_1. \end{aligned}$$

Voyons à trouver tout d'abord la signification de la fonction θ_1 ; pour cela formons les composantes de la vitesse suivant les trois axes liés à la forme du fil (tangente, normale principale, binormale); ce sont

$$\begin{aligned} -\frac{\partial D}{\partial t} + \alpha \frac{\partial x}{\partial t} + \beta \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma \frac{\partial z}{\partial t}, \\ \alpha' \frac{\partial x}{\partial t} + \beta' \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial z}{\partial t}, \\ \alpha'' \frac{\partial x}{\partial t} + \beta'' \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma'' \frac{\partial z}{\partial t}. \end{aligned}$$

Dans le cas qui nous occupe, cela devient

$$\begin{aligned} -\left(\frac{d\theta}{dt} D_1 + \frac{d\theta_1}{dt}\right) + \alpha \frac{d\theta}{dt} x_1 + \beta \frac{d\theta}{dt} y_1 + \gamma \frac{d\theta}{dt} z_1, \\ \alpha' \frac{d\theta}{dt} x_1 + \beta' \frac{d\theta}{dt} y_1 + \gamma' \frac{d\theta}{dt} z_1, \\ \alpha'' \frac{d\theta}{dt} x_1 + \beta'' \frac{d\theta}{dt} y_1 + \gamma'' \frac{d\theta}{dt} z_1. \end{aligned}$$

La vitesse est donc la résultante de deux vitesses, dont l'une a pour direction celle qui joint l'origine au point considéré et pour grandeur $\frac{d\theta}{dt} \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, par conséquent résulte pour ainsi dire du déplacement de la courbe par homothétie, et dont l'autre est une vitesse tangentielle de glissement sur la courbe, de grandeur égale à $-\left(\frac{d\theta}{dt} D_1 + \frac{d\theta_1}{dt}\right)$.

Nous voyons ainsi quelle est la signification de la fonction θ_1 .

Écrivons les équations en adjoignant aux hypothèses déjà faites que

le fil est homogène; nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \mathbf{D}_1 + \frac{d\theta_1}{dt} \right) \mathbf{D}'_1 + \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{C}_1 \mathbf{D}_1'' + \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{C}'_1 \mathbf{D}'_1 \\
 & - \frac{\partial}{\partial u} \{ \rho (\Psi + i\mathbf{X}) \} + \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_1''' + \mathbf{D}_1'') + \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{C}'_1 \mathbf{D}'_1 + \mathbf{D}'_1 \theta \Phi \\
 & + \theta \mathbf{D}'_1 \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{D}_1 + \frac{d^2\theta_1}{dt^2} \right) = 0, \\
 & \frac{i\theta^3 \mathbf{D}_1'^3}{\rho} \mathbf{X} - \theta^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{D}_1'^2 (\mathbf{C}_1'' + \mathbf{D}_1') - \theta^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{D}'_1 \mathbf{C}'_1 (\mathbf{C}_1''' + \mathbf{D}_1'') \\
 & - \theta^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_1''' + \mathbf{D}_1'') (\mathbf{C}_1''' + 2\mathbf{D}_1'') + \theta^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{C}_1 \mathbf{D}'_1 (\mathbf{C}_1^{iv} + \mathbf{D}_1''') \\
 & - 2\theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{D}'_1 (\mathbf{C}_1''' + \mathbf{D}_1'') \left(\frac{d\theta}{dt} \mathbf{D}_1 + \frac{d\theta_1}{dt} \right) + 2\theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{D}'_1 (\mathbf{C}_1''' + \mathbf{D}_1'') \left(\frac{d\theta}{dt} \mathbf{D}_1 + \frac{d\theta_1}{dt} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Telles sont les équations qu'il faut chercher à vérifier en mettant pour $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{D}_1$ des fonctions de u et pour θ et θ_1 des fonctions de t .

16. Considérons le cas où il n'y a pas de forces extérieures; on a alors

$$\Phi = \Psi = \mathbf{X} = 0.$$

La première équation du mouvement devient

$$\begin{aligned}
 & 2 \mathbf{D}_1 \mathbf{D}'_1 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \mathbf{D}'_1 \left(\theta \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta_1}{dt} \right) \\
 & + (2 \mathbf{C}_1 \mathbf{D}_1'' + 2 \mathbf{C}'_1 \mathbf{D}'_1 + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1''' + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1') \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0;
 \end{aligned}$$

c'est une relation de la forme

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{T}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{T}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{T}_3 = 0,$$

en posant

$$\mathbf{T}_1 = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad \mathbf{T}_2 = \theta \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta_1}{dt}, \quad \mathbf{T}_3 = \theta \frac{d^2\theta}{dt^2};$$

$$\mathbf{A}_1 = 2 \mathbf{D}_1 \mathbf{D}'_1, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{D}'_1, \quad \mathbf{A}_3 = 2 \mathbf{C}_1 \mathbf{D}_1'' + 2 \mathbf{C}'_1 \mathbf{D}'_1 + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1''' + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1'.$$

C'est la même relation que celle de M. Appell dans son Mémoire sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe, en traitant le problème correspondant; il suffit de remplacer $\mathbf{D}_1$ par $\mathbf{A} + \mathbf{A}''$ et

$$(2 \mathbf{C}_1 \mathbf{D}_1'' + 2 \mathbf{C}'_1 \mathbf{D}'_1 + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1''' + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1')$$

par

$$(\mathbf{A}' + \mathbf{A}''') (\mathbf{A} - \mathbf{A}'') - \mathbf{A}' (\mathbf{A}'' + \mathbf{A}^{iv}).$$

1° Les quantités T_1, T_2, T_3 ne peuvent pas être linéairement indépendantes, car cela entraînerait entre autres résultats

$$D_1 D'_1 = 0;$$

or ni D_1 , ni D'_1 ne peuvent être nuls; donc ce cas n'est pas possible.

2° Supposons donc que les quantités T_1, T_2, T_3 soient liées par une relation linéaire à coefficients constants,

$$K_1 T_1 + K_2 T_2 + K_3 T_3 = 0.$$

Nous en concluons alors qu'on a

$$\frac{2 D_1 D'_1}{K_1} = \frac{D'_1}{K_2} = \frac{2 D'_1 C_1 + 2 C_1 D'_1 + C_1 C''_1 + D_1 D'_1}{K_3}.$$

Nous déduisons de ces relations

$$D_1 = \frac{K_1}{2 K_2},$$

ce qui est impossible.

3° Supposons que les quantités T_1, T_2, T_3 soient liées par deux relations linéaires et homogènes à coefficients constants, ce qui revient à supposer que les A sont liés par une seule relation du même genre,

$$K_1 A_1 + K_2 A_2 + K_3 A_3 = 0;$$

nous aurons alors

$$\frac{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{K_1} = \frac{\theta \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta_1}{dt}}{K_2} = \frac{\theta \frac{d^2\theta}{dt^2}}{K_3}.$$

Comme K_3 n'est pas nul, car alors D_1 serait égal à une constante, ce qui est impossible, posons comme M. Appell ⁽¹⁾

$$\frac{K_1}{K_3} = \frac{c}{2};$$

(1) Ces calculs sont textuellement ceux de M. Appell, les T étant les mêmes, la relation de même forme.

il vient alors en intégrant l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} - c \frac{d^2\theta}{dt^2} &= 0, \\ \theta &= K(t + t_0)^{\frac{c}{c-2}}, \end{aligned}$$

en supposant c différent de 2.

Si $c = 2$, on aurait

$$\theta = K e^{ut}.$$

Quant à θ_1 , elle est donnée par la relation

$$\theta \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta_1}{dt} = \alpha \theta \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

en posant

$$\alpha = \frac{K_2}{K_3};$$

on en tire

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{a \frac{d\theta}{dt}}{c+1} + \frac{b}{\theta^2},$$

b étant une constante arbitraire; d'où enfin θ_1 par une quadrature,

$$\theta_1 = \frac{a}{c+1} \theta + b \int \frac{dt}{\theta^2}.$$

Quant aux fonctions C_1 et D_1 , elles sont données par les deux équations

$$\begin{aligned} CD_1 D'_1 + \alpha D'_1 + 2 C'_1 D'_1 + C_1 (C''_1 + 2 D''_1) + D_1 D'_1 &= 0, \\ \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \{ D_1^2 (C''_1 + D'_1) + [C' D'_1 + C_1 (C''_1 + 2 D''_1)] (C'_1 + D''_1) - C_1 D'_1 (C''_1 + D''_1) \} &= 0. \end{aligned}$$

Comme θ et $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ sont différents de zéro, il nous reste pour seconde équation

$$D_1^2 (C''_1 + D'_1) + (C'_1 + D''_1) [C'_1 D'_1 + C_1 (C''_1 + 2 D''_1)] - C_1 D'_1 (C''_1 + D''_1) = 0.$$

Nous avons ainsi déterminé le rapport d'homothétie θ , la fonction θ_1 qui nous fera connaître la vitesse de glissement du fil et la forme du fil à l'instant initial par les fonctions C_1 et D_1 .

4° Les A ne peuvent être linéairement indépendants, car alors on aurait

$$\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

ce qui est écarté, car ce cas nous ramène au repos apparent.

VI.

Sur quelques mouvements d'un fil dans un plan fixe.

17. M. Appell (1) a indiqué une forme particulièrement simple sous laquelle on peut mettre les équations du mouvement d'un fil homogène, dans un plan fixe, sous l'action de forces telles que les composantes X et Y suivant les axes fixes de coordonnées ne dépendent que du temps.

Ayant posé

$$\frac{\partial x}{\partial s} + i \frac{\partial y}{\partial s} = z_1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} - i \frac{\partial y}{\partial s} = z_2,$$

$$z_1 z_2 = 1;$$

en posant de nouveau

$$z_1 = e^{i\varphi}, \quad z_2 = e^{-i\varphi},$$

il obtient les deux équations suivantes :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 = - \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}.$$

En différenciant la première équation par rapport à s , et la deuxième deux fois successivement par rapport à s , nous obtenons les trois

(1) *Quelques remarques sur les équations du mouvement d'une chaîne parfaitement flexible*, § 10 (*Annaes da Academia Polytechnica do Porto*, t. IV, 1909).

équations

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} &= - \frac{\partial^3 T}{\partial s^3} + \frac{\partial T}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + 2 T \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s \partial t^2} &= 2 \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + 3 \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + T \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s^3}, \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial s^2 \partial t^2} &= 2 \frac{\partial^3 T}{\partial s^3} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + 5 \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + 4 \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s^3} + T \frac{\partial^4 \varphi}{\partial s^4}. \end{aligned}$$

En éliminant $\frac{\partial^3 T}{\partial s^3}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial s^2}$, $\frac{\partial T}{\partial s}$, T entre ces cinq équations, nous obtenons l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre que doit vérifier φ :

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 & 0 & -1 & 0 & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} & 2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 & 0 & -1 & 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s^3} & 3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} & 2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} & 0 & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s \partial t^2} \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial s^4} & 4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s^3} & 5 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} & 2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial s^2 \partial t^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Reportons-nous à la méthode générale exposée précédemment. Voyons les relations qui peuvent exister entre les fonctions C et D , le paramètre u et la quantité z_1 .

Nous supposons que le plan fixe est le plan des xy ; z sera donc nul ainsi que ses dérivées, nous avons

$$\frac{\partial x}{\partial s} + i \frac{\partial y}{\partial s} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{1}{D'} = \frac{-u^2(C''' + D'') - 2uD'}{D'};$$

or nous avons

$$z' = u(C''' + D'') + D' = 0.$$

En tenant compte de cette relation, nous obtenons

$$z_1 = -u,$$

d'où

$$z_2 = -\frac{1}{u}.$$

Ainsi nous nous sommes proposé dans le problème général de chercher les fonctions C et D, qui dans le cas particulier du mouvement dans un plan fixe se réduisent à une, l'une se déduisant de l'autre par la relation $z = 0$; notre recherche dans ce cas consistait donc à exprimer s en fonction de u et t ; par cette équation en φ nous obtenons donc u en fonction de s et t ; de la relation

$$s = D(u, t)$$

on peut tirer

$$u = F(s, t).$$

Le problème, tel qu'il est résolu par M. Appell, revient donc à la recherche de la fonction F.

A l'inspection de l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, nous voyons de suite qu'elle est vérifiée si φ est une fonction de s seulement, ou bien si φ est une fonction de t seulement. Nous allons voir les significations de ces deux expressions de φ .

Si φ ne dépend pas de s , cela revient à ce que D' soit nul; c'est le cas où le fil se réduit à un point.

Si φ ne dépend pas de t , il en est de même de la fonction D. En tenant compte de cela, de la relation $z' = 0$, nous déduisons que $C'' + D''$ est une fonction de u , ce qui nous indique que $C'' + D'$ est la somme d'une fonction de u et d'une fonction de t .

De la relation $z = 0$ nous obtenons pour C' la forme suivante, U_1 étant une fonction de u , θ_1 une fonction de t :

$$C' = U_1 + \theta_1 u,$$

ce qui donne pour C la valeur suivante :

$$C = U_1 + \theta_1 \frac{u^2}{2} + \theta_2.$$

Cette forme de la fonction C nous montre, d'après ce que nous avons vu (1) précédemment, que le mouvement a lieu de telle sorte que le fil

(1) *Mouvement d'un fil glissant sur une courbe invariable animée d'un mouvement de translation*, Chap. IV, §. 10.

a une forme invariable animée d'un mouvement de translation, et que de plus le fil ne glisse pas sur la courbe invariable puisque la fonction D ne dépend pas de t .

En comparant la première et la dernière colonne du déterminant, nous remarquons que l'équation en φ admet toutes les solutions de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre où K est une constante,

$$K \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est $f(s + Kt)$, la fonction f étant une fonction complètement arbitraire. Voyons à quoi correspond cet ensemble de solutions.

Pour toutes ces solutions nous aurons

$$u = F(s + Kt),$$

d'où nous déduisons

$$s = U(u) - Kt.$$

Nous ferons la remarque qu'avec cette valeur de D nous obtenons, pour C , la même forme que dans le cas précédent

$$C = U_1 + \theta_1 \frac{u^2}{2} + \theta_2.$$

Pour cet ensemble de valeurs de φ le mouvement est celui d'un fil glissant d'un mouvement uniforme sur une courbe invariable animée d'un mouvement de translation.

18. Proposons-nous de rechercher de quelle façon le mouvement d'un fil glissant sur une courbe de forme invariable animée d'un mouvement de translation peut se produire.

D'après ce que nous avons vu, si la fonction D est la somme d'une fonction de u et d'une fonction de t , le mouvement du fil sera du genre considéré et, s'il est de cette nature, D sera de cette forme.

Donc D doit être de la forme suivante :

$$D = U + \theta.$$

Remarquons que $-\frac{d\theta}{dt}$ représentera la vitesse de glissement du fil sur la courbe invariable; nous déduisons de là qu'on a

$$u = f(s - \theta),$$

d'où

$$\varphi = F(s - \theta);$$

donc si le mouvement est de la nature considérée, φ sera de cette forme; voyons pour quelles valeurs de θ , φ peut être de cette forme. Si nous remplaçons dans l'équation en φ , il vient

$$\begin{vmatrix} F'^2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ F'' & 2F' & 0 & 0 & \theta'' F' \\ 2F' F'' & F'^2 & 0 & -1 & 0 \\ F''' & 3F'' & 2F' & 0 & \theta'' F'' \\ F^{IV} & 4F''' & 5F'' & 2F' & \theta'' F''' \end{vmatrix} = 0;$$

ce qui nous donne $\theta'' = 0$, c'est-à-dire que le mouvement de glissement est uniforme, à moins que F ne satisfasse à la relation obtenue en annulant le facteur de θ'' .

Cette fonction F définit d'ailleurs la forme de la courbe invariable.

Si donc on considère un fil dans un plan fixe, soumis à des forces extérieures de son plan telles que leurs composantes suivant des axes de coordonnées fixes ne dépendent que du temps, et se mouvant de telle sorte qu'il glisse sur une courbe de forme invariable donnée animée d'un mouvement de translation; quand ce mouvement a lieu, le fil glisse dans le cas le plus général sur la courbe invariable d'un mouvement uniforme.

Nous pouvons dire que le mouvement d'un fil soumis à des forces remplissant les mêmes conditions que précédemment, glissant d'un mouvement uniforme sur une courbe invariable animée d'un mouvement de translation, est possible; la forme du fil est arbitraire ainsi que la vitesse constante de glissement.

19. Reprenons l'équation obtenue en annulant le coefficient de θ'' ; on peut l'écrire en multipliant la dernière colonne par 2 et la retrans-

chant de la deuxième, puis en posant $F' = F_1$:

$$\begin{vmatrix} F_1^2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ F_1' & 0 & 0 & 0 & F_1 \\ 2F_1F_1' & F_1^2 & 0 & -1 & 0 \\ F_1'' & F_1' & 2F_1 & 0 & F_1' \\ F_1''' & 2F_1'' & 5F_1' & 2F_1 & F_1'' \end{vmatrix} = 0.$$

Prenons comme variable indépendante F_1 . Posons $F_1' = y$, remplaçons F_1 par x ; on a alors

$$F'' = y y', \quad F''' = y(y y'' + y'^2);$$

d'où l'équation du second ordre qui suit :

$$\begin{vmatrix} x^2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & x \\ 2xy & x^2 & 0 & -1 & 0 \\ yy' & y & 2x & 0 & y \\ y(y y'' + y'^2) & 2yy' & 5y & 2x & yy' \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, nous obtenons l'équation

$$x y^3 y'' - x y^2 y'^2 + y^3 y' - 6 x^4 y y' + 11 x^3 y^2 - 4 x^7 = 0,$$

qui est une équation différentielle du second ordre.

Nous apercevons de suite les deux solutions particulières suivantes :

$$y_1 = 2ix^2, \quad y_2 = -2ix^2.$$

Voyons à quoi elles correspondent, en posant

$$\varepsilon = \pm 1;$$

elles donnent

$$y = 2i\varepsilon x^2,$$

c'est-à-dire

$$F_1' = 2i\varepsilon F_1^2;$$

d'où, par intégration,

$$F_1 = \frac{i}{2\varepsilon(v + K)},$$

en posant

$$s - \theta = v,$$

K étant une constante arbitraire; en intégrant une seconde fois, puisque $F_1 = F'$, nous obtenons, K_1 étant une constante arbitraire, l'expression de φ :

$$\varphi = \frac{i}{\varepsilon} L K_1 \sqrt{v + K}.$$

Suivant la valeur de ε , nous obtenons pour u les deux expressions suivantes en fonction de v :

Si

$$\varepsilon = +1,$$

on a

$$u = \frac{-1}{K_1 \sqrt{v + K}}; \quad \text{si} \quad \varepsilon = -1, \quad u = -K_1 \sqrt{v + K}.$$

Ce qui donne pour la fonction D les deux expressions suivantes :

$$v = s - \theta = D = \frac{1}{u^2 K_1^2} - K,$$

$$v = s - \theta = D = \frac{u^2}{K_1^2} - K.$$

Comme c'est la forme de la courbe seule qui nous intéresse, dans ce cas nous pouvons supposer qu'on a

$$s = D = \frac{K_1^2}{u^2}, \quad s = D = K_1^2 u^2.$$

Voyons les fonctions C dans ces deux cas. Considérons le cas où

$$s = \frac{K_1^2}{u^2}.$$

Nous aurons donc

$$C''' + D'' = \frac{2K_1^2}{u^4},$$

d'où par une quadrature

$$C'' + D' = \frac{-2K_1^2}{3u^3}, \quad C'' = \frac{4K_1^2}{3u^3};$$

donc on a, K_2 et K_3 étant des constantes,

$$C = \frac{-2K_1^2}{3u^2} + K_2, \quad \text{et} \quad C = \frac{K_1^2}{3u} + K_2 u + K_3,$$

d'où

$$x = -\frac{K_1^2}{3u^3}(1 + 2u^2) - K_3,$$

$$y = -\frac{iK_1^2}{3u^3}(1 - 2u^2) + iK_3.$$

Ce sont des courbes du troisième ordre.

Dans le cas où

$$s = K_1^2 u^2,$$

on a

$$C'' + D' = -2K_1^2;$$

d'où, K_2 étant une constante,

$$C' = -K_1^2 u^2 - 2K_1^2 u + K_2;$$

d'où, K_3 étant une constante,

$$C = -\frac{K_1^2}{3}u^3 - K_1^2 u^2 + K_2 u + K_3;$$

par conséquent, on a

$$x = -K_1^2 \left(1 + \frac{2}{3}u^3\right) - K_3,$$

$$y = -iK_1^2 \left(1 - \frac{2}{3}u^3\right) + iK_3.$$

Remarquons que les courbes sont des cercles points, où l'on a

$$(x + 2K_1^2)^2 + y^2 = 0.$$

Si nous éliminons u entre les expressions de x et y relatifs à la première solution $s = \frac{K_1^2}{u^2}$, il vient

$$\frac{9(x + iy)^3}{32K_1^4} = x - iy - 2K_3,$$

ce qui représente des cubiques imaginaires.

Ces deux solutions particulières n'interviennent en somme pas dans l'énoncé que nous avons donné.

20. *Problème.* — Proposons-nous le problème suivant :

Considérons un fil homogène dans un plan fixe sous l'action de forces dépendant uniquement du temps ; proposons-nous de rechercher

si le mouvement d'un fil glissant sur une circonférence qui reste homothétique à elle-même par rapport à son centre est possible et de quelle manière.

Nous prendrons pour origine des coordonnées le centre du cercle.

Nous avons vu que si C_1 et D_1 sont les fonctions de M. de Montcheuil pour la courbe à l'instant initial $t = 0$, les fonctions C et D qui définissent la courbe forme du fil à l'instant t sont données par les relations suivantes :

$$C = \theta C_1, \quad D = \theta D_1 + \theta_1;$$

or nous connaissons les fonctions C_1 et D_1 calculées par M. de Montcheuil (*) pour une circonférence de rayon a , de centre l'origine

$$C_1 = -iau, \quad D_1 = -iaLu.$$

Nous aurons donc

$$s = -ia\theta Lu + \theta_1.$$

Nous en déduisons

$$u = e^{-\frac{s-\theta_1}{ia\theta}} = -z_1;$$

d'où

$$-e^{\frac{i(s-\theta_1)}{a\theta}} = e^{i\varphi};$$

ce qui donne

$$\varphi = (2h + 1)\pi + \frac{s - \theta_1}{a\theta}.$$

Si le problème est possible, voilà quelle sera la valeur de φ qui doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre obtenue par M. Appell. Remplaçons, il vient ainsi

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2 \theta^2} & 0 & -1 & 0 & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 \\ 0 & \frac{2}{a^2 \theta} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ 0 & \frac{1}{a^2 \theta^2} & 0 & -1 & 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} \\ 0 & 0 & \frac{2}{a \theta} & 0 & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s \partial t^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{a \theta} & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial s^2 \partial t^2} \end{vmatrix} = 0.$$

(*) Voir le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXI, 1903, p. 241.

Nous pouvons enlever le facteur $\frac{2}{a^2\theta^2}$ qui n'est point nul et nous obtenons

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ \frac{1}{a\theta} & -1 & 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} \\ 0 & \frac{2}{a\theta} & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s^2 \partial t^2} \end{vmatrix} = 0;$$

or nous avons, en convenant que les accents mis aux θ indiqueront les dérivées par rapport à t de ces fonctions de t ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\theta_1 \theta' - \theta \theta'_1 - \theta' s}{a \theta^2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} &= \frac{-\theta'}{a \theta^2}, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s^2 \partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \frac{\theta_1 \theta'' - \theta \theta''_1 - 2 \theta_1 \theta'^2 + 2 \theta \theta' \theta'_1 + s(2 \theta'^2 - \theta \theta'')}{a \theta^3}. \end{aligned}$$

Notre relation revient donc à la suivante :

$$- \frac{1}{a\theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} = 0;$$

ce qui s'écrit, en enlevant le facteur $\frac{1}{a^2\theta^2}$ qui n'est ni nul ni infini,

$$\theta(\theta_1 \theta'' - \theta \theta''_1) + 2 \theta_1 \theta'^2 + 2 \theta \theta' \theta'_1 + s(2 \theta'^2 - \theta \theta'') + 4 \theta'(\theta_1 \theta' - \theta \theta'_1 - s \theta') = 0.$$

Comme les quantités s et l'unité sont indépendantes, cela nous donne

$$\begin{aligned} 2 \theta'^2 - \theta \theta'' - 4 \theta'^2 &= 0, \\ \theta(\theta_1 \theta'' - \theta \theta''_1) + 2 \theta_1 \theta'^2 - 2 \theta \theta' \theta'_1 &= 0; \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \theta \theta'' + 2 \theta'^2 &= 0, \\ \theta \theta''_1 + 2 \theta' \theta'_1 &= 0. \end{aligned}$$

Si nous comparons ces équations à celles obtenues par M. Appell dans le cas général d'une courbe quelconque sans forces extérieures (*Acta*

mathematica, t. XII, p. 32), nous voyons qu'il suffit de faire $c = -1$, $c_2 = 0$ pour retrouver celles que nous venons d'obtenir.

En intégrant ces équations différentielles, nous avons

$$\begin{aligned}\theta &= k (t + t_0)^{\frac{1}{3}}, \\ \theta_1 &= k_1 (t + t_0)^{\frac{1}{3}} + k_2.\end{aligned}$$

D'après la méthode employée par M. Appell, nous possédons les valeurs de $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$,

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \sin \varphi,$$

ce qui nous donne ici

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -\cos \frac{s - \theta_1}{a\theta}, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -\sin \frac{s - \theta_1}{a\theta},$$

d'où, par intégration,

$$x = -a\theta \sin\left(\frac{s - \theta_1}{a\theta}\right) + \theta_2, \quad y = a\theta \cos\left(\frac{s - \theta_1}{a\theta}\right) + \theta_3,$$

θ_2 et θ_3 étant des fonctions de t qui devront être nulles avec l'énoncé tel que nous nous le sommes proposé.

Montrons qu'avec la méthode des deux fonctions C et D nous obtenons aussi ces deux fonctions de t . Supposons en effet que nous ayons une solution intégrale de l'équation en φ ; ce qui revient, comme nous l'avons vu, à la détermination de la fonction $D(u, t)$.

De la relation

$$z' = u(C'' + D'') + D' = 0$$

nous tirons, λ' étant la dérivée partielle par rapport à u d'une fonction de u et t ,

$$C'' + D' = \lambda + \theta_4.$$

La relation

$$z = u(C' + D') - C' = 0$$

donne l'expression suivante de C' :

$$C' = u\lambda' + \theta_4;$$

d'où par intégration, λ_1 étant une fonction de u et t , θ_4 et θ_5 des fonctions de t ,

$$C = \lambda_1 + \frac{u^2}{2} \theta_4 + \theta_5.$$

Nous voyons de suite qu'il existe, entre les fonctions $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{\theta_4}{2} - \theta_5, \\ \theta_3 &= i \left(\frac{\theta_4}{2} + \theta_5 \right). \end{aligned}$$

Dans le cas qui nous occupe, nous aurons pour C l'expression

$$C = \theta C_1 + \frac{u^2}{2} \theta_4 + \theta_5,$$

dans laquelle C_1 est une fonction de u qui avec D_1 détermine la forme du fil à l'instant initial.

Revenons aux équations du mouvement :

$$\begin{aligned} m \left(\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial T}{\partial s} + m(\alpha X + \beta Y), \\ m \left(\alpha' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) &= \frac{T}{\rho} + m(\alpha' X + \beta' Y). \end{aligned}$$

Nous avons pour $\rho, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$, les expressions suivantes, en posant

$$v = \frac{s - \theta_1}{a\theta},$$

$$\rho = a\theta, \quad \alpha = -\cos v, \quad \beta = -\sin v, \quad \alpha' = \sin v, \quad \beta' = -\cos v.$$

D'autre part, en éliminant la tension entre les deux équations du mouvement, ce qui se fait en égalant les valeurs de $\frac{\partial T}{\partial s}$ tirées de la première équation et de la dérivée par rapport à s de la seconde, il vient

$$2 \left(\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) - a\theta \left(\alpha' \frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} + \beta' \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2} \right) - 2(\alpha X + \beta Y) = 0.$$

Calculons les diverses expressions qui entrent dans cette équation;

nous avons

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\alpha(\theta'' - \theta v'^2) \sin v - \alpha(2\theta' v' + \theta v'') \cos v + \theta''_2,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\alpha(\theta'' - \theta v'^2) \cos v - \alpha(2\theta' v' + \theta v'') \sin v + \theta''_3,$$

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha(2\theta' v' + \theta v'') - \theta''_2 \cos v - \theta''_3 \sin v;$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} = v'^2 \cos v + v'' \sin v,$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2} = v'^2 \sin v - v'' \cos v,$$

$$\alpha' \frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} + \beta' \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2} = v''.$$

L'équation s'écrit donc de la manière suivante :

$$4\alpha\theta'v' + \alpha\theta v'' - 2(\theta''_2 \cos v + \theta''_3 \sin v) + 2(X \cos v + Y \sin v) = 0.$$

Remarquons qu'on a

$$\varphi = (2h + 1)\pi + v;$$

donc, comme l'équation en φ est

$$-\frac{1}{a\vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} = 0;$$

et que nous avons

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} = \frac{-\theta'}{\alpha\vartheta^2},$$

la quantité v satisfait à l'équation

$$4\theta'v' + \theta v'' = 0.$$

Nous déterminerons θ_2 et θ_3 qui doivent être nuls par l'équation

$$(X - \theta''_2) \cos v + (Y - \theta''_3) \sin v = 0.$$

En dérivant les deux membres de cette équation par rapport à s ,

nous obtenons

$$(X - \theta_2'') \sin c - (Y - \theta_3'') \cos c = 0.$$

Nous en déduisons donc

$$X - \theta_2'' = 0,$$

$$Y - \theta_3'' = 0.$$

Si nous nous en tenons au problème spécial que nous nous sommes posé, nous voyons que ce problème n'est possible que si aucune force n'agit sur le fil. Les quantités déterminant le mouvement auront les mêmes expressions que dans le problème plus général que nous allons envisager.

Si nous ne supposons plus les fonctions θ_2 et θ_3 nulles, nous avons un problème plus général, qui suppose que la forme du fil est disposée sur un cercle, dont le centre se déplace dans le plan quand le temps varie. Les résultats obtenus au cours de la recherche du problème précédent permettent de donner l'énoncé suivant :

Le mouvement d'un fil dans un plan fixe qui a constamment la forme d'une circonférence de rayon variable, soumis à des forces extérieures dépendant uniquement du temps, est toujours possible. Si a désigne le rayon de la circonférence à l'instant initial, R le rayon à l'instant t , quelles que soient les forces extérieures, t_0 étant une constante, on a

$$R = t_0^{-\frac{1}{3}}(t + t_0)^{\frac{1}{3}}a.$$

Une autre fonction θ_1 de t qui entre dans l'expression de la vitesse est indépendante des forces, K_1 et K_2 étant des constantes qui seront déterminées par les conditions initiales

$$\theta_1 = k_1(t + t_0)^{\frac{1}{3}} + k_2.$$

Quant au mouvement du centre, il sera tel que, si θ_2 et θ_3 désignent ses coordonnées, on ait, X et Y étant les composantes des forces extérieures,

$$\theta_2' = X, \quad \theta_3' = Y.$$

VII.

Problème.

21. Proposons-nous le problème suivant : Le mouvement d'un fil glissant sur une courbe de forme invariable animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe est-il possible ; et s'il l'est, dans quelles conditions.

Nous prendrons l'axe fixe pour axe des z ; les coordonnées d'un point quelconque de la courbe invariable à l'instant initial $t = 0$ que nous appellerons x_1, y_1, z_1 , s'expriment à l'aide du paramètre u et des deux fonctions C et D d'après les formules de M. de Montcheuil.

Supposons que, dans son mouvement de rotation autour de l'axe fixe Oz , la courbe de forme invariable entraîne les axes de coordonnées Ox et Oy ; appelons Ox_1 et Oy_1 leurs position à l'instant t ; désignons par α l'angle des deux directions Ox_1 et Ox ; cet angle α , qui sera une fonction du temps seulement, déterminera complètement le mouvement de rotation autour de Oz ; nous verrons plus loin comment nous introduirons le glissement sur la courbe de forme invariable.

Les coordonnées d'un point quelconque de la courbe forme du fil à l'instant t sont, par rapport au trièdre mobile $Ox_1y_1z_1$, x_1, y_1, z_1 données en fonction du paramètre u par les formules de M. de Montcheuil.

Les coordonnées de ce même point à la même époque par rapport au trièdre fixe de référence $Oxyz$ sont x, y, z données par les formules

$$x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha,$$

$$y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha,$$

$$z = z_1.$$

Les fonctions C et D de la variable u nous donneront la forme du fil ; α fonction de t nous fera connaître la rotation autour de Oz ; enfin une

quatrième fonction D_1 de t qui s'introduira plus loin nous fera connaître la vitesse de glissement sur la courbe fixe.

Nous avons en effet ⁽¹⁾

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = D'^2,$$

donc

$$s = D + D_1,$$

D_1 étant une fonction de t .

Si nous cherchons les composantes de la vitesse suivant les trois directions liées à la courbe, tangente, normale principale, binormale, nous trouvons

$$\alpha \frac{\partial x}{\partial t} + \beta \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{dD_1}{dt}, \quad \alpha' \frac{\partial x}{\partial t} + \beta' \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \alpha'' \frac{\partial x}{\partial t} + \beta'' \frac{\partial y}{\partial t};$$

ce qui nous montre que la vitesse est la résultante d'une vitesse de rotation de composantes suivant les trois axes fixes $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, 0 et d'une vitesse tangentielle égale à $-\frac{dD_1}{dt}$.

Nous allons, dans ces conditions, écrire les équations du mouvement.

Remarquons que nous avons toujours

$$\alpha = \frac{x'}{D'}, \quad \beta = \frac{y'}{D'}, \quad \gamma = \frac{z'}{D'},$$

et, d'autre part,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x'' \frac{\left(\frac{dD_1}{dt}\right)^2}{D'^2} - 2 \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x' \frac{\left(\frac{dD_1}{dt}\right)^2 D'' + \frac{d^2 D_1}{dt^2} D'^2}{D'^3};$$

de même, pour $\frac{d^2 y}{dt^2}$ et $\frac{d^2 z}{dt^2}$, nous avons des expressions analogues; il vient donc, pour la quantité

$$\alpha \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{d^2 z}{dt^2},$$

⁽¹⁾ On peut dire aussi plus simplement que, par rapport à des axes entraînés avec la courbe dans la rotation, le fil a un mouvement de repos apparent, donc on a $s = D + D_1$.

l'expression suivante :

$$\frac{1}{D'} \left(x' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + y' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) - \frac{d^2 D_1}{dt^2};$$

en tenant compte des relations que nous allons écrire

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= D'^2, \\ x' x'' + y' y'' + z' z'' &= D' D'', \\ x' \frac{\partial x'}{\partial t} + y' \frac{\partial y'}{\partial t} + z' \frac{\partial z'}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

nous avons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= (-x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - (x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha) \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -(x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha) \frac{d^2 \alpha}{dt^2}. \end{aligned}$$

Le premier membre de la première équation du mouvement s'écrit par conséquent

$$\frac{1}{D'} \left[-(x_1 x'_1 + y_1 y'_1) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (x_1 y'_1 - y_1 x'_1) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right] - \frac{d^2 D_1}{dt^2}.$$

La première équation du mouvement est donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} + D' \left(\Phi + \frac{d^2 D_1}{dt^2} \right) + (x_1 x'_1 + y_1 y'_1) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \\ + (x_1 y'_1 - y_1 x'_1) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = 0, \end{aligned}$$

où les quantités $(x_1 x'_1 + y_1 y'_1)$, $(x_1 y'_1 - y_1 x'_1)$ ont les valeurs écrites ci-dessous :

$$\begin{aligned} x_1 x'_1 + y_1 y'_1 &= -u^2 (C'' + D') (C''' + D'') - u D' (C'' + D') + (u C' - C) (C''' + D''), \\ x_1 y'_1 - y_1 x'_1 &= i [u D' (C'' + D') + (u C' - C) (C''' + D'')]. \end{aligned}$$

Passons à la deuxième équation; nous avons toujours pour α' , β' , γ' les valeurs suivantes :

$$\alpha' = \frac{\rho}{D'^2} (x'' - \alpha D''), \quad \beta' = \frac{\rho}{D'^2} (y'' - \beta D''), \quad \gamma' = \frac{\rho}{D'^2} (z'' - \gamma D'').$$

La quantité $\alpha' \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta' \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma' \frac{d^2 z}{dt^2}$ a donc pour expression

$$\frac{\rho}{D'^2} \left[(x''^2 + y''^2 + z''^2) \frac{\left(\frac{dD_1}{dt}\right)^2}{D'^2} - 2 \left(x'' \frac{\partial x'}{\partial t} + y'' \frac{\partial y'}{\partial t} \right) \frac{dD_1}{D'} \right. \\ \left. + x'' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + y'' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 \frac{D''^2}{D'^2} - \frac{D''}{D'} \left(x' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + y' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \right];$$

ce qui s'écrit

$$\frac{\rho}{D'^2} \left[\frac{D'^2}{\rho^2} \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 - 2 \frac{(x'_1 y''_1 - y'_1 x''_1)}{D'} \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} - (x_1 x''_1 + y_1 y''_1) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \right. \\ \left. + (x_1 y''_1 - y_1 x''_1) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{D''}{D'} (x_1 x'_1 + y_1 y'_1) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \frac{D''}{D'} (x_1 y'_1 - y_1 x'_1) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right].$$

La deuxième équation du mouvement se met donc sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 + \frac{\rho}{D'^2} \left\{ \left[(x_1 y''_1 - y_1 x''_1) - \frac{D''}{D'} (x_1 y'_1 - y_1 x'_1) \right] \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right. \\ \left. - \left[(x_1 x''_1 + y_1 y''_1) - \frac{D''}{D'} (x_1 x'_1 + y_1 y'_1) \right] \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \right. \\ \left. - 2 (x_1 y''_1 - y_1 x''_1) \frac{dD_1}{dt} \frac{d\alpha}{D'} \right\} = \frac{T}{m\rho} + \Psi,$$

où les quantités $(x_1 y''_1 - y_1 x''_1)$, $(x_1 x''_1 + y_1 y''_1)$ ont les valeurs qui suivent

$$(x_1 y''_1 - y_1 x''_1) = i [D' (C'' + D') + u D'' (C'' + D') + u D' (C''' + D'') \\ + u C'' (C''' + D'') + (u C' - C) (C'' + D'')], \\ (x_1 x''_1 + y_1 y''_1) = -C (C'' + D'') - C' (C''' + 2D'') - D' (C'' + D').$$

Quant à la quantité $(x'_1 y''_1 - y'_1 x''_1)$ elle a déjà été calculée

$$x'_1 y''_1 - y'_1 x''_1 = i [u (C''' + D'') (C'' + 2D'') - u D' (C'' + D'') + D' (C''' + D'')].$$

Voyons maintenant la troisième équation du mouvement.

Remarquons que si nous formons la quantité $\alpha'' \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta'' \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma'' \frac{d^2 z}{dt^2}$,

il reste

$$-2 \left(\alpha'' \frac{\partial x'}{\partial t} + \beta'' \frac{\partial y'}{\partial t} \right) \frac{dD_1}{D'} + \alpha'' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta'' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Or nous avons

$$\alpha'' = \frac{\rho}{D'^3} (y' z'' - z' y'') = \frac{\rho}{D'^3} [(x'_1 z''_1 - z'_1 x''_1) \sin \alpha + (y'_1 z''_1 - z'_1 y''_1) \cos \alpha],$$

$$\beta'' = \frac{\rho}{D'^3} (z' x'' - x' z'') = \frac{\rho}{D'^3} [(z'_1 x''_1 - x'_1 z''_1) \cos \alpha + (y'_1 z''_1 - z'_1 y''_1) \sin \alpha].$$

La troisième équation du mouvement s'écrit donc

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{D'^3} [-x_1 (x'_1 z''_1 - z'_1 x''_1) - y_1 (y'_1 z''_1 - z'_1 y''_1)] \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \\ & + \frac{\rho}{D'^3} [-x_1 (y'_1 z''_1 - z'_1 y''_1) + y_1 (x'_1 z''_1 - z'_1 x''_1)] \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \\ & - 2 \frac{\rho}{D'^3} (D'' z'_1 - D' z''_1) \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} = X, \end{aligned}$$

où les quantités $(x'_1 z''_1 - z'_1 x''_1)$, $(y'_1 z''_1 - z'_1 y''_1)$ ont les valeurs calculées précédemment dans la recherche des équations du mouvement quelconque d'un fil dans l'espace.

22. Supposons que le fil soit homogène et que les forces extérieures et leurs composantes Φ , Ψ , X ne dépendent que de la variable u .

Remarquons que de la deuxième équation nous pouvons tirer

$$\frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} = - \frac{\partial}{\partial u} (\rho \Psi) - \lambda \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \mu \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - 2\nu \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt},$$

où λ , μ et ν ne dépendent que de la variable u et ont des valeurs qu'il serait facile d'écrire.

En égalant cette expression de $\frac{\partial T}{\partial u}$ à celle que nous tirons de la première équation du mouvement, nous obtenons la relation

$$\begin{aligned} & [(x_1 x'_1 + y_1 y'_1) - \mu] \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + [-(x_1 y'_1 - y_1 x'_1) - \lambda] \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + D' \Phi \\ & - \frac{\partial}{\partial u} (\rho \Psi) + D' \frac{d^2 D_1}{dt^2} - 2\nu \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi une relation de la forme

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 + A_3 T_3 + A_4 T_4 + A_5 T_5 = 0,$$

en posant

$$A_1 = x_1 x'_1 + y_1 y'_1 - \mu, \quad T_1 = \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2,$$

$$A_2 = -(x_1 y'_1 - y_1 x'_1) - \lambda, \quad T_2 = \frac{d^2 \alpha}{dt^2},$$

$$A_3 = D' \Phi - \frac{\partial}{\partial u} (\rho \Psi), \quad T_3 = 1,$$

$$A_4 = D', \quad T_4 = \frac{d^2 D_1}{dt^2},$$

$$A_5 = -2\nu, \quad T_5 = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt}.$$

1° Les A ne peuvent être arbitraires, car les T ne peuvent être nuls puisque T₃ est égal à l'unité.

2° Supposons que les A soient liés par une relation unique, linéaire et homogène, à coefficients constants,

$$K_1 A_1 + K_2 A_2 + K_3 A_3 + K_4 A_4 + K_5 A_5 = 0,$$

ce qui nous donne

$$\frac{T_1}{K_1} = \frac{T_2}{K_2} = \frac{T_3}{K_3} = \frac{T_4}{K_4} = \frac{T_5}{K_5}.$$

Nous pouvons supposer K₃ égal à l'unité, car il ne peut être nul, puisque l'on a

$$T_3 = 1;$$

il vient ainsi

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 &= K_1, & \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= K_2, \\ \frac{d^2 D_1}{dt^2} &= K_4, & \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} &= K_5. \end{aligned}$$

Pour que ces quatre relations soient compatibles, il faut que nous ayons

$$K_2 = 0, \quad K_4 = 0,$$

c'est-à-dire que la relation entre les A soit

$$K_1 A_1 + A_3 + K_5 A_5 = 0.$$

Dans ce cas, nous voyons que le mouvement de rotation est uniforme ainsi que la vitesse de glissement du fil sur la courbe.

Quant à la forme du fil, elle est donnée par la troisième équation du mouvement où l'on tient compte des résultats obtenus pour α et D_1 , jointe à la relation écrite ci-dessus.

Revenons aux équations du mouvement telles que nous les avons écrites au début de ce problème et donnons aux fonctions α et D_1 les valeurs que nous avons trouvées; il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} + D'(\Phi + K_1 x_1 \alpha_1 + K_1 \gamma_1 \beta_1) &= 0, \\ \frac{T}{m\rho} + \Psi &= \frac{1}{\rho} \frac{K_5}{\sqrt{K_1}} - K_1 x_1 \alpha'_1 - K_1 \gamma_1 \beta'_1 + 2K_5 \frac{\gamma'_1}{D'} \alpha'_1 - 2K_5 \frac{x_1}{D'} \beta'_1, \\ X + K_1 x_1 \alpha''_1 + K_1 \gamma_1 \beta''_1 - 2K_5 \frac{\gamma'_1}{D'} \alpha''_1 + 2K_5 \frac{x_1}{D'} \beta''_1 &= 0. \end{aligned}$$

Nous voyons, d'après ces équations (1), que la forme du fil est celle obtenue par la figure de repos apparent, le mouvement de glissement étant uniforme, à condition d'ajouter aux forces extérieures une première force de composantes suivant les trois axes fixes :

$$K_1 x_1, \quad K_1 \gamma_1, \quad 0.$$

Ce sera la force centrifuge, et une seconde dont les composantes suivant les mêmes directions sont :

$$-2 \frac{K_5 \gamma'_1}{D'}, \quad -2 \frac{K_5 x'_1}{D'}, \quad 0;$$

C'est une force dirigée suivant la normale parallèle au plan xOy ; c'est la force centrifuge composée.

3° A côté de ce cas, qui est le plus général, il peut s'en présenter d'autres pour des lois particulières de forces; nous les obtiendrons en supposant qu'il existe deux relations linéaires et homogènes, à coefficients constants entre les A , soient les relations qui suivent :

$$\begin{aligned} A_1 &= K_1 A_3 + K_2 A_4 + K_3 A_5, \\ A_2 &= H_1 A_3 + H_2 A_4 + H_3 A_5; \end{aligned}$$

(1) Dans ces équations les quantités $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha''_1, \beta''_1, \gamma''_1$ sont pour la courbe forme du fil à l'instant initial ce qu'étaient $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$ dans le cas général.

ce qui donne les relations suivantes, en portant les valeurs de A_1 et A_2 dans la relation primitive et en écrivant qu'alors A_3 , A_4 et A_5 sont indépendants :

$$K_1 T_1 + H_1 T_2 + T_3 = 0,$$

$$K_2 T_1 + H_2 T_2 + T_4 = 0,$$

$$K_3 T_1 + H_3 T_2 + T_5 = 0.$$

Ces trois dernières relations nous donneront les fonctions α et D_1 ; elles s'écrivent

$$K_1 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + H_1 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 1 = 0,$$

$$K_2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + H_2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{d^2 D_1}{dt^2} = 0,$$

$$K_3 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + H_3 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} = 0.$$

Il faudra donc que α soit une solution commune aux deux équations différentielles suivantes :

$$K_1 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + H_1 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 1 = 0,$$

$$H_3 \frac{d^3 \alpha}{dt^3} \frac{d\alpha}{dt} - H_3 \left(\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right)^2 - (H_2 - K_3) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - K_2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^4 = 0.$$

Une fois α connu, la troisième relation nous donnera la vitesse de glissement.

Quant à la forme du fil, elle sera connue quand on aura déterminé les fonctions C et D . Pour cela nous avons tout d'abord les deux relations qui lient les A , puis la troisième équation du mouvement qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$B_1 T_1 + B_2 T_2 - 2 B_5 T_5 - \frac{D'^3 X}{\rho} T_3 = 0,$$

où les B sont des fonctions de u seulement et ont des valeurs faciles à écrire.

Remarquons que nous avons entre les quatre fonctions T_1 , T_2 , T_3 , T_5 deux relations linéaires et homogènes, à coefficients constants, nous en tirons donc, en égalant à zéro les coefficients de T_1 et T_2 , après l'élimination de T_3 et T_5 , deux relations; donc les fonctions C et D

satisfont à quatre relations, donc les forces données satisfont à deux relations obtenues par l'élimination des deux fonctions C et D entre les quatre relations.

4° Supposons qu'il y ait entre les A trois relations linéaires, homogènes, à coefficients constants; de ces trois relations nous pouvons tirer

$$A_1 = K_1 A_4 + K_2 A_5,$$

$$A_2 = H_1 A_4 + H_2 A_5,$$

$$A_3 = L_1 A_4 + L_2 A_5;$$

en portant ces valeurs dans la relation primitive, et en remarquant qu'alors A_4 et A_5 sont indépendants, il vient, en égalant à zéro leurs coefficients,

$$K_1 T_1 + H_1 T_2 + L_1 T_3 + T_4 = 0,$$

$$K_2 T_1 + H_2 T_2 + L_2 T_3 + T_5 = 0.$$

Ces deux équations nous permettent de connaître le mouvement au moyen des deux fonctions α et D .

La forme du fil qui est déterminée par les deux fonctions C et D sera donnée par les trois relations entre les A, auxquelles il faut adjoindre la troisième équation du mouvement

$$B_1 T_1 + B_2 T_2 - 2 B_5 T_5 - \frac{D'^3 X}{\rho} T_3 = 0.$$

Comme les T sont liés par la relation

$$K_2 T_1 + H_2 T_2 + L_2 T_3 + T_5 = 0,$$

il en résulte qu'on a

$$\frac{B_1}{K_2} = \frac{B_2}{H_2} = \frac{-\frac{D'^3 X}{\rho}}{L_2} = -2 B_5.$$

Les fonctions C et D doivent donc satisfaire à six relations; en éliminant C et D entre ces six relations, il nous restera quatre relations auxquelles les forces extérieures doivent satisfaire.

5° Supposons qu'il y ait entre les A quatre relations linéaires et homogènes, à coefficients constants; de ces relations on pourra tirer

quatre des A en fonction du cinquième

$$\begin{aligned} A_1 &= K_1 A_5, & A_2 &= K_2 A_5, \\ A_3 &= K_3 A_5, & A_4 &= K_4 A_5. \end{aligned}$$

Nous déduisons de là immédiatement la relation

$$K_1 T_1 + K_2 T_2 + K_3 T_3 + K_4 T_4 + T_5 = 0.$$

Cette seule équation nous déterminera α , si l'on se donne D , ou inversement.

Pour déterminer C et D , nous avons les relations entre les A écrites ci-dessus, et en plus la troisième équation du mouvement

$$B_1 T_1 + B_2 T_2 + B_3 T_3 - \frac{D^3 X}{\rho} T_3 = 0.$$

Les fonctions T_1, T_2, T_3, T_5 sont indépendantes; en effet nous avons entre les T l'unique relation

$$K_1 T_1 + K_2 T_2 + K_3 T_3 + K_4 T_4 + T_5 = 0;$$

K_4 est différent de zéro; car s'il était nul, A_4 serait nul; or on a $A_4 = D'$, qui ne peut être nul; nous en déduisons donc

$$\begin{aligned} B_1 &= 0, & B_2 &= 0, & B_3 &= 0, \\ \frac{X}{\rho} &= 0. \end{aligned}$$

La dernière relation nous donne, si la forme du fil n'est point une droite, ce que nous supposons,

$$X = 0,$$

ce qui indique déjà une condition pour les forces extérieures; d'autre part, des relations

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0$$

nous déduisons que le plan osculateur est parallèle au plan xOy , donc que la courbe doit être dans un plan fixe, car on a

$$\begin{aligned} z'_1 x''_1 - x'_1 z''_1 &= 0, \\ y'_1 z''_1 - z'_1 y''_1 &= 0. \end{aligned}$$

Nous sommes donc ramenés au mouvement d'un fil dans un plan fixe ayant une forme invariable animée d'un mouvement de rotation autour d'un point de son plan.

6° Les T ne peuvent être arbitraires, car les A ne peuvent être tous nuls, puisque A_4 est égal à D'.

23. Considérons un fil animé du mouvement envisagé dans le problème que nous venons de traiter; ce mouvement est un mouvement de repos apparent par rapport à des axes mobiles animés du même mouvement de rotation que la courbe. Traitons donc le problème comme un problème de repos apparent, à la condition d'ajouter deux forces : la force centrifuge et la force centrifuge composée.

Supposons qu'alors le fil soit seulement soumis à la force centrifuge composée dont les composantes suivant les trois axes fixes Ox, y, z sont :

$$-2 \frac{\gamma'}{D'} \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt}, \quad 2 \frac{x'}{D'} \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt}, \quad 0.$$

Les équations du repos apparent sont :

$$X = 0, \quad \frac{T}{m} = \left[\frac{dD_1}{dt} \right]^2 - \rho \Psi, \quad \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} + D' \left(\Phi + \frac{d^2 D_1}{dt^2} \right) = 0.$$

Formons la première équation :

$$\begin{aligned} X &= -2 \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} \left(\alpha'' \frac{\gamma'}{D'} - \beta'' \frac{x'}{D'} \right) \\ &= -2 \frac{\rho}{D'^4} \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} [\gamma' (\gamma' z'' - z' \gamma'') - x' (z' x'' - x' z'')], \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} &-2 \frac{\rho}{D'^4} \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} [z'' (x'^2 + \gamma'^2 + z'^2) - z' (x' x'' + \gamma' \gamma'' + z' z'')] \\ &= -2 \frac{\rho}{D'^3} (D' z'' - D'' z') \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} = -2 \frac{\rho}{D'} \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{z'}{D'} \right). \end{aligned}$$

Cette équation devient donc

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{z'}{D'} \right) = 0;$$

d'où

$$\frac{z'}{D'} = K,$$

K étant en valeur absolue plus petit que l'unité. Ceci suppose que $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{dD_1}{dt}$ sont différents de zéro, ce que nous supposons, car alors nous retomberions sur des problèmes plus simples déjà étudiés d'équilibre ou de repos apparent sans qu'il y ait de forces extérieures.

De la relation $z' = KD'$ nous déduisons que la figure du fil est une hélice tracée sur un cylindre de génératrice Oz .

Voyons les expressions de Φ et Ψ ; nous avons

$$\begin{aligned}\Phi &= -2 \frac{dz}{dt} \frac{dD_1}{dt} \frac{x' y' - x'' y''}{D'^2} = 0, \\ \Psi &= -2 \frac{\rho}{D'^3} \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} (y' x'' - x' y'') = 2 \gamma' \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt};\end{aligned}$$

or nous avons

$$\gamma' = \sqrt{1 - K^2},$$

d'après les propriétés de l'hélice qui sont bien connues.

Les autres équations du mouvement sont donc

$$\frac{T}{m} = \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 - 2\rho \sqrt{1 - K^2} \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt}, \quad \frac{1}{m} \frac{dT}{du} + D' \frac{d^2 D_1}{dt^2} = 0.$$

Supposons le fil homogène; il vient l'équation

$$2 \sqrt{1 - K^2} \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} \rho' = D' \frac{d^2 D_1}{dt^2};$$

d'où nous déduisons

$$\rho = \lambda D + u,$$

λ et μ étant des constantes.

Ce qui revient à dire que la section droite du cylindre sur lequel est tracé l'hélice est une spirale logarithmique.

Quant au mouvement, pour le déterminer, nous avons l'équation

$$2 \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} \lambda \sqrt{1 - K^2} = \frac{d^2 D_1}{dt^2};$$

ce qui s'écrit

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{1}{2\lambda\sqrt{1-K^2}} L \frac{dD_1}{dt}.$$

Si l'on se donne la vitesse de glissement, la rotation en résulte par l'équation précédente.

Nous arrivons donc au résultat suivant :

Avec les hypothèses faites, le fil a la forme d'une hélice tracée sur un cylindre qui a pour section droite une spirale logarithmique. Quant au mouvement des deux quantités α et D_1 qui le déterminent, l'une est arbitraire, l'autre en résulte.

Ce cas peut se réaliser en supposant un câble plongé dans un liquide de même densité que lui, en tenant compte de la rotation de la Terre.

La résistance du liquide ne fait que changer la vitesse de glissement.

Traisons ce problème directement; pour cela il suffira de supposer que les forces extérieures se réduisent à une force égale et directement opposée à la force centrifuge.

Nous savons que les composantes de cette force suivant les directions Ox_1 , Oy_1 obtenues, en supposant que le trièdre $Oxyz$ ait subi la rotation autour de Oz sont

$$-\sqrt{x^2+y^2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2, \quad \sqrt{x^2+y^2} \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad 0;$$

ce qui nous donne pour les expressions de Φ , Ψ , X les valeurs suivantes :

$$\Phi = -\frac{(xx' + yy')}{D'} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{(x'y - y'x)}{D'} \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

$$\Psi = -(\alpha'x + \beta'y) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\alpha'y - \beta'x) \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

$$X = -(\alpha''x + \beta''y) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (\alpha''y - \beta''x) \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Si nous remplaçons alors ces valeurs dans les équations du mouvement que nous avons écrites précédemment, il vient pour la troisième équation du mouvement

$$-2 \frac{\rho}{D'^3} (D''z'_1 - D'z''_1) \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} = 0.$$

Supposons d'abord $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{dD_1}{dt}$ différents de zéro; nous avons

$$z'_1 = KD'.$$

Nous obtenons le même résultat que précédemment; en poursuivant les calculs, nous obtiendrions les mêmes équations que par l'autre méthode.

Nous ne pouvons point supposer que $\frac{d\alpha}{dt}$ soit nul, car nous serions ramenés à l'étude du repos apparent quand aucune force extérieure n'agit.

Supposons que $\frac{dD_1}{dt}$ soit nul, ce qui revient à faire l'hypothèse qu'il n'y a pas de glissement sur la courbe; alors les autres équations du mouvement deviennent, en supposant le fil homogène,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} &= -2(x'_1 y_1 - y'_1 x_1) \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, \\ \frac{T}{m\rho} &= \frac{2\rho}{D'^2} \left[D'(x_1 y''_1 - y_1 x''_1) - D''(x_1 y'_1 - y_1 x'_1) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right], \end{aligned}$$

ce qui nous donne $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = 0$, d'où $\alpha = \lambda t + \mu$, le mouvement de rotation est uniforme, la tension est nulle, chaque point du fil se meut comme s'il était libre; ou bien α est arbitraire; dans ce cas la courbe forme du fil satisfait à une condition, les deux fonctions C et D sont liées par une relation.

VIII.

Problème.

24. Proposons-nous de rechercher si le mouvement défini par le glissement d'un fil sur une courbe de forme invariable qui se meut d'un mouvement hélicoïdal autour de Oz est possible et dans quelles conditions.

En conservant les mêmes notations que dans le problème précédent, K étant une constante, nous avons :

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y &= x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha, \\ z &= z_1 + K\alpha. \end{aligned}$$

Si nous formons de la même manière que précédemment la première équation du mouvement, il vient

$$-(x_1 x'_1 - y_1 y'_1) \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + (x_1 y'_1 - y_1 x'_1 + K z'_1) \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} + D' \left(\Phi + \frac{d^2 D_1}{dt^2} \right).$$

Quant à la deuxième équation, nous aurons un terme de plus que dans le problème précédent provenant du terme $\gamma' \frac{\partial^2 z}{dt^2}$; il vient ainsi

$$\begin{aligned} \frac{T}{m\rho} + \Psi &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 + \frac{\rho}{D'^3} \\ &\times \left\{ [D'(x_1 y''_1 - y_1 x''_1) - D''(x_1 y'_1 - y_1 x'_1) + (D'K z''_1 - D''K z'_1)] \right. \\ &\times \frac{d^2 z}{dt^2} - \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 [D'(x_1 x''_1 + y_1 y''_1) - D''(x_1 x'_1 + y_1 y'_1)] \\ &\left. - 2(x'_1 y''_1 - y'_1 x''_1) \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} \right\}. \end{aligned}$$

Il en sera de même pour la troisième équation du mouvement, qui s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} [-y_1(y'_1 z''_1 - z'_1 y''_1) + x_1(z'_1 x''_1 - x'_1 z''_1) + K(x'_1 y''_1 - y'_1 x''_1)] \\ + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 [-x_1(y'_1 z''_1 - z'_1 y''_1) - y_1(z'_1 x''_1 - x'_1 z''_1)] \\ - 2 \frac{d\alpha}{dt} \frac{dD_1}{dt} \frac{x'_1(z'_1 x''_1 - x'_1 z''_1) - y'_1(y'_1 z''_1 - z'_1 y''_1)}{D'} = \frac{D'^3 X}{\rho}. \end{aligned}$$

Le mouvement sera déterminé par les fonctions α et D_1 et la constante K ; la forme invariable du fil par les fonctions C et D .

On peut, à l'aide de ces équations, traiter différents problèmes comme dans le cas du mouvement de rotation.

IX.

Problème.

25. Examinons maintenant le problème plus général du mouvement d'un fil glissant sur une courbe de forme invariable se mouvant d'une façon quelconque.

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point quelconque de la courbe à l'instant initial; nous supposerons ces coordonnées exprimées

à l'aide des deux fonctions C et D de M. de Montcheuil et de leurs dérivées.

Les coordonnées d'un point du fil à l'instant t s'écriront, d'après les formules bien connues,

$$\begin{aligned}x &= A_1 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1, \\y &= B_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3 z_1, \\z &= C_1 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3 z_1,\end{aligned}$$

avec les relations suivantes, φ, ψ, θ étant les angles d'Euler :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ \alpha_2 &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ \alpha_3 &= \sin \psi \sin \theta; \\ \beta_1 &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ \beta_2 &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ \beta_3 &= -\cos \psi \sin \theta; \\ \gamma_1 &= \sin \varphi \cos \theta, \\ \gamma_2 &= \cos \varphi \sin \theta, \\ \gamma_3 &= \cos \theta;\end{aligned}$$

les quantités $A_1, B_1, C_1, \varphi, \psi, \theta$ étant des fonctions de t à déterminer.

Il s'introduit, comme dans les problèmes précédents, une fonction de t , D_1 ⁽¹⁾, dont la signification mécanique est représentée par ce fait que la vitesse de glissement sur la courbe de forme invariable est $-\frac{dD_1}{dt}$.

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned}x' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + y' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + z' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} + D' \left(\Phi + \frac{d^2 D_1}{dt^2} \right), \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 - 2 \left(\alpha' \frac{\partial x'}{\partial t} + \beta' \frac{\partial y'}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial z'}{\partial t} \right) \frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'} \\ &+ \alpha' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{T}{m\rho} + \Psi, \\ \alpha'' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta'' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma'' \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2 \left(\alpha'' \frac{\partial x'}{\partial t} + \beta'' \frac{\partial y'}{\partial t} + \gamma'' \frac{\partial z'}{\partial t} \right) \frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'} &= X.\end{aligned}$$

(1) Le fil a un mouvement de repos apparent par rapport à des axes entraînés avec la courbe dans son mouvement.

En remplaçant toutes les quantités qui figurent dans ces équations par leurs valeurs en fonction de $C, D, \varphi, \psi, \theta, A_1, B_1, C_1$, nous aurons trois relations auxquelles ces fonctions doivent satisfaire. Les fonctions de $t, A_1, B_1, C_1, \varphi, \psi, \theta, D_1$, nous donneront le mouvement quand elles seront connues. Quant aux fonctions C et D , elles nous donneront la forme de la courbe.

26. *Traisons un cas particulier.* Supposons que la courbe de forme invariable soit plane, que les vitesses de chacun de ses points soient dirigées, suivant la normale, au plan de la courbe et que, suivant cette direction, les forces extérieures n'aient point de composantes.

Nous pouvons alors prendre pour plan des zx le plan de la courbe forme du fil à l'instant initial, alors γ_1 est nul, les formules se réduisent aux suivantes :

$$\begin{aligned} x &= A_1 + \alpha_1 x_1 + \alpha_3 z_1, \\ y &= B_1 + \beta_1 x_1 + \beta_3 z_1, \\ z &= C_1 + \gamma_1 x_1 + \gamma_3 z_1. \end{aligned}$$

Remarquons que les cosinus directeurs de la binormale sont ainsi $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

En tenant compte des hypothèses, la troisième équation du mouvement devient

$$\alpha_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2 z}{dt^2} = 0,$$

ce qui s'écrit

$$-2 \frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'} \left(\alpha_2 \frac{\partial x'}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial y'}{\partial t} + \gamma_2 \frac{\partial z'}{\partial t} \right) + \alpha_2 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma_2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0,$$

ce qui devient en explicitant

$$\begin{aligned} -2 \frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'} & \left[\left(\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{dt} \right) x'_1 + \left(\alpha_2 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_3}{dt} \right) z'_1 \right] \\ & + \left(\alpha_2 \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2 \beta_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2 \gamma_1}{dt^2} \right) x_1 + \left(\alpha_2 \frac{d^2 \alpha_3}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2 \beta_3}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2 \gamma_3}{dt^2} \right) z_1 \\ & + \left(\alpha_2 \frac{d^2 A_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2 B_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2 C_1}{dt^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Écrivons maintenant que les composantes de la vitesse suivant la tangente et la normale sont nulles. L'expression de la composante suivant la tangente est $\alpha \frac{dx}{dt} + \beta \frac{dy}{dt} + \gamma \frac{dz}{dt}$, expression qui, égale à zéro, donne l'équation suivante :

$$\alpha \frac{\partial x}{\partial t} + \beta \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{dD_1}{dt} = 0;$$

ce qui s'écrit, en développant les calculs,

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_1}{dt} \right) x_1 x'_1 + \left(\alpha_3 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_3}{dt} \right) z_1 z'_1 \\ & + \left(\alpha_1 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_3}{dt} \right) x'_1 z_1 + \left(\alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt} \right) z'_1 x_1 \\ & + \left(\alpha_1 \frac{dA_1}{dt} + \beta_1 \frac{dB_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dC_1}{dt} \right) x'_1 + \left(\alpha_3 \frac{dA_1}{dt} + \beta_3 \frac{dB_1}{dt} + \gamma_3 \frac{dC_1}{dt} \right) z'_1 - D' \frac{dD_1}{dt} = 0. \end{aligned}$$

En remarquant que nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_1}{dt} &= 0, & \alpha_3 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_3}{dt} &= 0, \\ \alpha_1 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_3}{dt} &= - \left(\alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt} \right), \end{aligned}$$

nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_1 \frac{dA_1}{dt} + \beta_1 \frac{dB_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dC_1}{dt} \right) x'_1 + \left(\alpha_3 \frac{dA_1}{dt} + \beta_3 \frac{dB_1}{dt} + \gamma_3 \frac{dC_1}{dt} \right) z'_1 \\ & + \left(\alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt} \right) (x_1 z'_1 - z_1 x'_1) - D' \frac{dD_1}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions de u , D' , x'_1 , z'_1 , $(x_1 z'_1 - z_1 x'_1)$, sont indépendantes; en effet, supposons qu'elles soient liées par une relation linéaire et homogène à coefficients constants; on aurait

$$\lambda D' + \mu x'_1 + \nu z'_1 + (x_1 z'_1 - z_1 x'_1) = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\mu x'_1 + \nu z'_1 + (x_1 z'_1 - z_1 x'_1)}{D'} = -\lambda.$$

Cette relation exprime que la distance du point fixe de coordonnées $-\nu, \mu$ à la tangente est constante; la courbe serait donc soit une circonférence de centre ce point fixe, soit une droite; écartons provisoirement ce cas, nous déduisons alors de la relation les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\frac{dD_1}{dt} &= 0, & \alpha_1 \frac{dA_1}{dt} + \beta_1 \frac{dB_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dC_1}{dt} &= 0, \\ \alpha_3 \frac{dA_1}{dt} + \beta_3 \frac{dB_1}{dt} + \gamma_3 \frac{dC_1}{dt} &= 0, \\ \alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

L'expression de la composante, suivant la normale principale, est

$$\alpha' \frac{\partial x}{\partial t} + \beta' \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial z}{\partial t};$$

nous avons

$$\begin{aligned}\alpha' &= \frac{1}{D'} (\beta_2 z' - \gamma_2 y') = \frac{1}{D'} (\alpha_1 z'_1 - \alpha_3 x'_1), \\ \beta' &= \frac{1}{D'} (\gamma_2 x' - \alpha_2 z') = \frac{1}{D'} (\beta_1 z'_1 - \beta_3 x'_1), \\ \gamma' &= \frac{1}{D'} (\alpha_2 y' - \beta_2 x') = \frac{1}{D'} (\gamma_1 z'_1 - \gamma_3 x'_1).\end{aligned}$$

Remplaçons dans l'expression de la composante de la vitesse et égalons-la à zéro; il vient, en enlevant le facteur $\frac{1}{D'}$ qui est différent de zéro,

$$\begin{aligned}& \left(\alpha_1 \frac{dA_1}{dt} + \beta_1 \frac{dB_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dC_1}{dt} \right) z'_1 - \left(\alpha_3 \frac{dA_1}{dt} + \beta_3 \frac{dB_1}{dt} + \gamma_3 \frac{dC_1}{dt} \right) x'_1 \\ & + \left(\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_1}{dt} \right) x_1 z'_1 - \left(\alpha_3 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_3}{dt} \right) z_1 x'_1 \\ & + \left(\alpha_1 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_3}{dt} \right) z_1 z'_1 - \left(\alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt} \right) x_1 x'_1 = 0.\end{aligned}$$

En vertu des relations trouvées en annulant la composante de la vitesse suivant la tangente, cette expression est nulle.

Remarquons que, sous ces conditions, la troisième équation du

mouvement devient

$$\begin{aligned} \left(\alpha_2 \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2 \beta_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2 \gamma_1}{dt^2} \right) x_1 + \left(\alpha_2 \frac{d^2 \alpha_3}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2 \beta_3}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2 \gamma_3}{dt^2} \right) z_1 \\ + \left(\alpha_2 \frac{d^2 A_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2 B_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2 C_1}{dt^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Comme les quantités x_1 , z_1 , et l'unité sont indépendantes, puisque nous avons écarté le cas où le fil avait la forme d'une droite, il vient donc

$$\begin{aligned} \alpha_2 \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2 \beta_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2 \gamma_1}{dt^2} &= 0, \\ \alpha_2 \frac{d^2 \alpha_3}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2 \beta_3}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2 \gamma_3}{dt^2} &= 0, \\ \alpha_2 \frac{d^2 A_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2 B_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2 C_1}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

Les trois relations liant A_1 , B_1 , C_1 nous donnent, K étant une constante,

$$\frac{dA_1}{dt} = K\alpha_2, \quad \frac{dB_1}{dt} = K\beta_2, \quad \frac{dC_1}{dt} = K\gamma_2.$$

Nous déduisons de même de ces relations et de celles obtenues précédemment qu'on a, λ et μ étant des constantes,

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= \lambda\alpha_2, & \frac{d\beta_1}{dt} &= \lambda\beta_2, & \frac{d\gamma_1}{dt} &= \lambda\gamma_2, \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= \mu\alpha_2, & \frac{d\beta_3}{dt} &= \mu\beta_2, & \frac{d\gamma_3}{dt} &= \mu\gamma_2. \end{aligned}$$

Soient x_1 , y_1 , z_1 les coordonnées d'un point lié invariablement au fil, à l'instant initial; ses coordonnées à l'instant t seront x , y , z données par les formules

$$\begin{aligned} x &= A_1 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1, \\ y &= B_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3 z_1, \\ z &= C_1 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3 z_1. \end{aligned}$$

Cherchons le lieu des points qui ne varient pas dans le mouvement,

c'est-à-dire ceux dont la vitesse est nulle; on aura donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{d\alpha_1}{dt} x_1 + \frac{d\alpha_2}{dt} y_1 + \frac{d\alpha_3}{dt} z_1 + \frac{dA_1}{dt} = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{d\beta_1}{dt} x_1 + \frac{d\beta_2}{dt} y_1 + \frac{d\beta_3}{dt} z_1 + \frac{dB_1}{dt} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{d\gamma_1}{dt} x_1 + \frac{d\gamma_2}{dt} y_1 + \frac{d\gamma_3}{dt} z_1 + \frac{dC_1}{dt} = 0.\end{aligned}$$

Si nous formons l'expression

$$\alpha_1 \frac{\partial x}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma_1 \frac{\partial z}{\partial t},$$

en tenant compte des relations obtenues, il vient

$$\left(\alpha_1 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{dt} \right) y_1 = 0,$$

ou bien encore

$$-\lambda y_1 = 0.$$

Si nous supposons λ différent de zéro, il vient

$$y_1 = 0.$$

Formons l'expression $\alpha_2 \frac{\partial x}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma_2 \frac{\partial z}{\partial t}$, il vient

$$K + \lambda x_1 + \mu z_1 = 0,$$

et de plus on a

$$\alpha_3 \frac{\partial x}{\partial t} + \beta_3 \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma_3 \frac{\partial z}{\partial t} = -\mu y_1.$$

Nous voyons ainsi qu'il y a une droite du plan des zx , qui, liée invariablement au fil, est immobile pendant le mouvement de celui-ci. Cette droite sera l'axe des z si μ est nul ainsi que K ; alors dans ce cas $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ sont des constantes, donc ψ et θ sont des constantes que nous pouvons prendre nulles. Il en est de même pour A_1, B_1, C_1 qui sont égaux à des constantes que nous supposerons nulles. Les coordonnées d'un point du fil s'expriment donc de la façon suivante :

$$x = x_1 \cos \varphi, \quad y = x_1 \sin \varphi, \quad z = z_1.$$

D'ailleurs, comme on a

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \lambda \alpha_2,$$

il vient

$$-\sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\lambda \sin \varphi,$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda.$$

La courbe fixe tourne autour de Oz d'un mouvement uniforme.

Nous arrivons donc au résultat suivant :

Lorsqu'un fil se meut, en affectant la forme d'une courbe plane et de façon que les vitesses de ses points soient toutes normales au fil, si aucune force binormale n'agit sur l'élément du fil, il engendre une surface de révolution; ses diverses positions coïncident avec les méridiens et ses points décrivent les parallèles d'un mouvement uniforme.

C'est l'énoncé de M. Floquet, dans sa Note à l'Académie des Sciences du 2 juillet 1900.

Nous avons, au cours du problème, supposé λ différent de zéro, ce qu'on pouvait toujours faire, car, si λ était nul, nous aurions formé la quantité

$$\alpha_3 \frac{\partial x}{\partial t} + \beta_3 \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma_3 \frac{\partial z}{\partial t} = -\mu y_1,$$

et des deux quantités λ ou μ , une au moins est différente de zéro, sans quoi φ , ψ et θ seraient des constantes; on serait ramené à un problème d'équilibre.

Nous avons précédemment écarté le cas où le fil avait la forme d'une circonférence; nous allons examiner ce cas particulier.

Prenons pour axe des x un rayon du cercle, pour axe des z une direction perpendiculaire dans le plan du cercle, enfin pour axe des y la direction perpendiculaire au plan du cercle dans un sens tel que le trièdre soit direct.

D'après les résultats de M. de Montcheuil, nous avons les coordonnées d'un point du cercle de centre $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, de rayon R

en fonction de u données par le système suivant :

$$x_1 = a - \frac{iR}{2} \frac{1-u^2}{u}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \frac{R}{2} \frac{1+u^2}{u}, \quad D = -iRLu.$$

En remplaçant x_1 , z_1 et D par leurs valeurs dans les relations exprimant que la vitesse est dirigée suivant la binormale, et qu'il n'y a pas de forces extérieures dans cette direction, nous obtenons les relations

$$\begin{aligned} & -\frac{dD_1}{dt} \left[-\left(\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{dt} \right) \frac{1+u^2}{u} \right. \\ & \quad \left. - i \left(\alpha_2 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_3}{dt} \right) \frac{1-u^2}{u} \right] \\ & + \left(\alpha_2 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} \right) \left(a - \frac{iR}{2} \frac{1-u^2}{u} \right) \\ & + \left(\alpha_2 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} \right) \frac{R(1+u^2)}{2u} + \alpha_2 \frac{d^2A_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2B_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2C_1}{dt^2} = 0, \\ & + \left(\alpha_1 \frac{dA_1}{dt} + \beta_1 \frac{dB_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dC_1}{dt} \right) \frac{1+u^2}{2u} - i \left(\alpha_3 \frac{dA_1}{dt} + \beta_3 \frac{dB_1}{dt} + \gamma_3 \frac{dC_1}{dt} \right) \frac{1-u^2}{2u} \\ & + \left(\alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt} \right) \left[R - i \frac{a(1-u^2)}{2u} \right] - \frac{dD_1}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Écrivons que, dans ces relations, les fonctions de u , $\frac{1+u^2}{u}$, $\frac{1-u^2}{u}$, 1 , sont indépendantes; il vient ainsi le système des six relations :

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \frac{dA_1}{dt} + \beta_1 \frac{dB_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dC_1}{dt} = 0, \\ & \alpha_3 \frac{dA_1}{dt} + \beta_3 \frac{dB_1}{dt} + \gamma_3 \frac{dC_1}{dt} + a \left(\alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt} \right) = 0, \\ & \frac{dD_1}{dt} - R \left(\alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt} \right) = 0, \\ & 2 \frac{dD_1}{dt} \left(\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{dt} \right) + R \left(\alpha_2 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} \right) = 0, \\ & 2 \frac{dD_1}{dt} \left(\alpha_2 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_3}{dt} \right) - R \left(\alpha_2 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} \right) = 0, \\ & \alpha_2 \frac{d^2A_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2B_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2C_1}{dt^2} + a \left(\alpha_2 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Nous savons (1) que $\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \frac{d\alpha_3}{dt}$ sont donnés par les formules suivantes où λ, μ, ν seront à déterminer :

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt} &= \nu\alpha_2 - \mu\alpha_3, & \frac{d\alpha_2}{dt} &= \lambda\alpha_3 - \nu\alpha_1, \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= \mu\alpha_1 - \lambda\alpha_2.\end{aligned}$$

Nous avons les mêmes formules pour les β et les γ ; il suffit de changer les α en β , puis en γ .

Si nous éliminons $\frac{dD_1}{dt}$ entre les quatrième et cinquième relations obtenues, il vient, en se servant des valeurs des dérivées écrites ci-dessus,

$$\begin{vmatrix} \nu & -\frac{d\lambda}{dt} + \mu\nu \\ -\lambda & -\frac{d\nu}{dt} - \lambda\mu \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui nous donne

$$\lambda \frac{d\lambda}{dt} + \nu \frac{d\nu}{dt} = 0;$$

ce qui s'écrit, K étant une constante,

$$\lambda^2 + \nu^2 = K^2;$$

ce qui revient aux relations suivantes, ω étant à déterminer :

$$\lambda = K \cos \omega, \quad \nu = K \sin \omega.$$

La troisième relation nous donne

$$\frac{dD_1}{dt} = -R\mu.$$

En portant cette valeur dans la quatrième relation, nous obtenons

$$\mu\nu + \frac{d\lambda}{dt} = 0$$

(1) En tenant compte des relations obtenues, l'expression de la composante de la vitesse suivant la normale principale est identiquement nulle.

ou bien

$$\left(\mu - \frac{d\omega}{dt}\right) K \sin \omega = 0;$$

ce qui donne, à moins que K ou ω ne soit nul et alors nous retombons sur le cas général,

$$\mu = \frac{d\omega}{dt}.$$

La première relation nous indique d'autre part que $\frac{dA_1}{dt}$, $\frac{dB_1}{dt}$, $\frac{dC_1}{dt}$ sont de la forme

$$\frac{dA_1}{dt} = p\alpha_2 + q\alpha_3, \quad \frac{dB_1}{dt} = p\beta_2 + q\beta_3, \quad \frac{dC_1}{dt} = p\gamma_2 + q\gamma_3.$$

La deuxième relation donne donc

$$q = a\mu = a \frac{d\omega}{dt}.$$

Quant à la dernière, elle donne

$$\frac{dp}{dt} = -a \frac{d\nu}{dt}, \quad p = p_0 - a\nu.$$

Si $\frac{d\omega}{dt}$ est nul, c'est-à-dire si ω est une constante, nous retombons sur le cas général; nous voyons donc que, dans le cas où la courbe est une circonférence, le mouvement tel que nous l'avons défini dans le cas général est possible, mais il l'est aussi d'une infinité d'autres manières ⁽¹⁾, quand ω est une fonction de t .

27. Problème. — Supposons qu'à l'instant initial la courbe soit plane et dans le plan des zx . Supposons, comme précédemment, que la vitesse soit dirigée suivant la binormale au plan de la courbe, et supposons de plus que les forces extérieures aient leur résultante dirigée suivant cette binormale; proposons-nous d'étudier le mouvement obtenu sous ces conditions.

Nous supposerons que la courbe n'est point une circonférence; nous

⁽¹⁾ Dans tous les cas, comme la forme du fil reste une ligne de courbure puisqu'elle coupe la surface engendrée sous un angle droit, cette surface est une surface canal.

avons vu précédemment que ces conditions se ramenaient aux relations suivantes, en conservant les mêmes notations :

$$\begin{aligned}\alpha_1 \frac{dA_1}{dt} + \beta_1 \frac{dB_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dC_1}{dt} &= 0, \\ \alpha_3 \frac{dA_1}{dt} + \beta_3 \frac{dB_1}{dt} + \gamma_3 \frac{dC_1}{dt} &= 0, \\ \alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt} &= 0, \\ \frac{dD_1}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Ce qui nous donne, λ, μ, ν étant des fonctions à déterminer,

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dt} &= \lambda \alpha_2, & \frac{dB_1}{dt} &= \lambda \beta_2, & \frac{dC_1}{dt} &= \lambda \gamma_2, \\ \frac{d\alpha_1}{dt} &= \mu \alpha_2, & \frac{d\beta_1}{dt} &= \mu \beta_2, & \frac{d\gamma_1}{dt} &= \mu \gamma_2, \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= \nu \alpha_2, & \frac{d\beta_3}{dt} &= \nu \beta_2, & \frac{d\gamma_3}{dt} &= \nu \gamma_2.\end{aligned}$$

Formons maintenant les deux premières équations du mouvement. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d^2 A_1}{dt^2} + \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} x_1 + \frac{d^2 \alpha_3}{dt^2} z_1 \\ &= (\lambda + \mu x_1 + \nu z_1) \frac{d\alpha_2}{dt} + \alpha_2 \left(\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\mu}{dt} x_1 + \frac{d\nu}{dt} z_1 \right),\end{aligned}$$

et deux expressions analogues pour $\frac{d^2 y}{dt^2}$ et $\frac{d^2 z}{dt^2}$; il suffit pour les obtenir de faire la permutation $\alpha \beta \gamma$.

Nous avons en outre

$$x = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{D'} x' = \frac{1}{D'} (x_1 x'_1 + x_3 z'_1)$$

et deux expressions analogues pour β et γ .

L'équation du mouvement

$$\alpha \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial s}$$

devient donc

$$\frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} = (\lambda + \mu x_1 + \nu z_1) x'_1 \left(\alpha_1 \frac{dx_2}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{dt} \right) \\ + (\lambda + \mu x_1 + \nu z_1) z'_1 \left(\alpha_3 \frac{dx_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_2}{dt} \right);$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} = (\lambda + \mu x_1 + \nu z_1) (-\mu x'_1 - \nu z'_1).$$

Quant à l'équation du mouvement

$$\frac{T}{m\rho} = \alpha' \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta' \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma' \frac{d^2 z}{dt^2},$$

nous avons vu précédemment qu'on avait

$$\alpha' = \frac{1}{D'} (\alpha_1 z'_1 - \alpha_3 x'_1),$$

$$\beta' = \frac{1}{D'} (\beta_1 z'_1 - \beta_3 x'_1),$$

$$\gamma' = \frac{1}{D'} (\gamma_1 z'_1 - \gamma_3 x'_1);$$

d'où

$$\frac{TD'}{m\rho} = (\lambda + \mu x_1 + \nu z_1) (\nu x'_1 - \mu z'_1).$$

Nous pouvons, en supposant le fil homogène, intégrer la première équation du mouvement qui nous donne

$$\frac{T}{m} = - \frac{(\lambda + \mu x_1 + \nu z_1)^2}{2} + \mathcal{G},$$

θ étant une fonction de t seulement.

D'où, par élimination de T , nous obtenons

$$- \frac{(\lambda + \mu x_1 + \nu z_1)^2}{2} + \mathcal{G} = \frac{(\lambda + \mu x_1 + \nu z_1) (\nu x'_1 - \mu z'_1) \rho}{D'}.$$

Cette relation peut s'écrire

$$\frac{\lambda^2}{2} - \theta + \mu^2 \left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1 z_1' \rho}{D'} \right) + \nu^2 \left(\frac{z_1^2}{2} + \frac{\rho x_1' z_1}{D'} \right) \\ + \mu \nu \left(x_1 z_1 + x_1 x_1' \frac{\rho}{D'} - z_1 z_1' \frac{\rho}{D'} \right) + \lambda \mu \left(x_1 - \frac{z_1' \rho}{D'} \right) + \lambda \nu \left(z_1 + \frac{\rho}{D'} x_1' \right) = 0.$$

C'est une relation de la forme

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 + A_3 T_3 + \dots = 0.$$

Posons :

$$A_1 = 1, \quad T_1 = \frac{\lambda^2}{2} - \theta, \quad A_2 = x_1 \left(\frac{x_1}{2} - \frac{z_1' \rho}{D'} \right), \quad T_2 = \mu^2, \\ T_3 = \nu^2, \quad A_3 = z_1 \left(\frac{z_1}{2} - \frac{\rho x_1'}{D'} \right), \quad A_4 = x_1 z_1 + (x_1 x_1' - z_1 z_1') \frac{\rho}{D'}, \quad T_4 = \mu \nu, \\ A_5 = x_1 - \frac{z_1' \rho}{D'}, \quad T_5 = \lambda \mu, \quad A_6 = z_1 + \frac{\rho}{D'} x_1', \quad T_6 = \lambda \nu.$$

1° Tous les A sont indépendants, c'est le cas général; alors nous obtenons :

$$\frac{\lambda^2}{2} - \theta = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0.$$

Remarquons que dans ce cas la tension du fil est nulle; chaque point du fil se meut comme un point matériel libre soumis aux forces extérieures considérées, chaque point étant affecté de la masse m .

Les quantités $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ sont des constantes; les trois axes de coordonnées ont donc des directions fixes. Nous pouvons choisir un trièdre de référence tel que ses axes soient les trois directions fixes.

Nous aurons alors, en supposant que la direction de $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ coïncide avec celle de OY et pour des valeurs convenables des constantes,

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \int \lambda dt, \quad C_1 = 0.$$

Quant à la fonction λ , elle est donnée par la troisième équation du mouvement qui est, dans le cas qui nous occupe,

$$\frac{d\lambda}{dt} = X.$$

Nous voyons de suite que les forces extérieures ne peuvent point dépendre de u .

Si elles ne dépendent pas de t , ce qui aura lieu par exemple dans le cas de la pesanteur en supposant l'axe Oy dirigé vers le nadir, on aura

$$\lambda = Kt + K_1,$$

et par intégration

$$B_1 = \frac{Kt^2}{2} + K_1t + K_2.$$

Le fil engendre un cylindre qui a pour section droite sa forme à l'instant initial; ses différents points décrivent les génératrices du cylindre.

Les forces extérieures ne peuvent dépendre que de t , le mouvement dépend de ces forces.

Si les forces extérieures ne dépendent pas du temps, le mouvement est uniformément accéléré, ce que l'on aurait pu prévoir puisque, la tension étant nulle, chaque point se meut comme s'il était libre, et l'on sait que le mouvement d'un point matériel soumis à une force constante en grandeur et en direction est un mouvement uniformément accéléré et rectiligne, la trajectoire ayant pour direction celle de la force.

Les autres cas qui se présentent, en supposant les A non indépendants, ont lieu pour des circonstances particulières où la courbe de forme invariable satisfait à certaines conditions.

28. *Cas particulier.* — Supposons que le fil se meuve en affectant la forme d'une courbe plane et de façon que les vitesses de ses points soient toutes normales au fil, supposons qu'il n'y ait aucune force tangentielle et binormale et que la force soit une fonction donnée de la vitesse $\psi(v)$, supposons que le fil soit homogène mais d'épaisseur variable, m étant proportionnel à l'épaisseur et fonction de l'arc. Cherchons s'il est possible que de plus le fil présente en tous ses points une égale chance à la rupture, ce qui revient à dire que la tension est de la forme

$$T = km,$$

k désignant une fonction de t positive.

Dans le problème précédent⁽¹⁾, en supposant que les vitesses soient normales à la courbe et qu'il n'y ait point de forces binormales, nous avons obtenu, λ, μ, ν étant des constantes, D_1 étant une constante,

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt} &= \lambda\alpha_2, & \frac{d\beta_1}{dt} &= \lambda\beta_2, & \frac{d\gamma_1}{dt} &= \lambda\gamma_2, \\ \frac{d\alpha_1}{dt} &= \mu\alpha_2, & \frac{d\beta_1}{dt} &= \mu\beta_2, & \frac{d\gamma_1}{dt} &= \mu\gamma_2, \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= \nu\alpha_2, & \frac{d\beta_3}{dt} &= \nu\beta_2, & \frac{d\gamma_3}{dt} &= \nu\gamma_2.\end{aligned}$$

Nous avons d'autre part formé précédemment les équations du mouvement où figure la tension; ces équations sont, en tenant compte de ce qu'on a $\Phi = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial u} &= -(\lambda + \mu x_1 + \nu z_1)(\mu x'_1 + \nu z'_1), \\ \frac{T}{m} D' + \Psi &= (\lambda + \mu x_1 + \nu z_1)(-\mu z'_1 + \nu x'_1).\end{aligned}$$

Comme on a

$$\frac{\partial T}{\partial u} = k \frac{dm}{du},$$

il vient

$$\begin{aligned}k \frac{dm}{m} &= -(\lambda + \mu x_1 + \nu z_1)(\mu x'_1 + \nu z'_1), \\ \frac{k}{\rho} D' + \Psi &= (\lambda + \mu x_1 + \nu z_1)(-\mu z'_1 + \nu x'_1).\end{aligned}$$

La première de ces deux équations nous montre que k doit être pris constant, et de plus que m est donné par la formule

$$m = A e^{-\frac{(\lambda + \mu x_1 + \nu z_1)^2}{2k}},$$

A étant une constante arbitraire.

La deuxième équation, jointe à la relation

$$\gamma_1 = 0,$$

(¹) En faisant abstraction du cas où la courbe est une circonférence.

nous permettra de définir le méridien de la surface trajectoire par la connaissance des deux fonctions C et D.

Il existe donc une infinité de mouvements de la nature considérée possibles pour le fil homogène quand son épaisseur suit la loi indiquée par l'expression de m .

Nous obtenons le même résultat que M. Floquet dans sa Note du 2 juillet 1900.

D'ailleurs, si nous remarquons que la vitesse a pour valeur dans ce cas,

$$\lambda + \mu x_1 + \nu z_1,$$

nous voyons que nous retombons sur les mêmes équations que celles de M. Floquet.

X.

Problème.

29. Nous allons étudier si le mouvement défini comme il va être indiqué est possible, et dans ce cas déterminer de quelle manière.

Considérons une courbe fixe en forme et en position Γ et ses différentes développantes D.

Ces développantes dépendant d'une constante arbitraire sont en nombre infini.

Dans le mouvement que nous définissons la courbe forme du fil est à chaque instant une développante D de Γ .

De plus, si nous considérons le point P⁽¹⁾ de Γ correspondant à un point M déterminé du fil que nous marquons par exemple en faisant un nœud dans le fil, nous supposons que ce point P, qui se meut sur Γ quand le temps varie, a une vitesse qui est la même quel que soit le point M choisi sur le fil, et cela à tout instant t ; cette vitesse pouvant naturellement varier avec le temps.

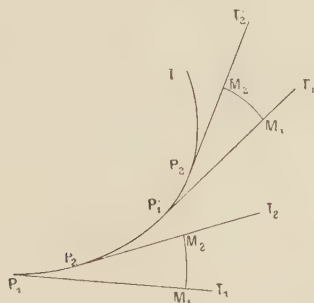
A tout instant l'ensemble S des points P obtenu en faisant décrire au point M la longueur totale du fil⁽²⁾, est un arc de longueur constante de la courbe Γ .

(¹) Le point M sera par conséquent situé sur la tangente PT à Γ en P.

(²) Si le fil n'est point limité, nous considérerons la portion du fil comprise entre deux éléments.

Si nous considérons deux molécules du fil M_1 et M_2 à l'instant initial et les deux points correspondants P_1 et P_2 de la courbe Γ , et si nous regardons l'ensemble de tous les points de l'arc $P_1 P_2$ comme les

Fig. 2.



différents points d'un fil de longueur l'arc $P_1 P_2$, homogène, inextensible, animé d'un mouvement de repos apparent sur Γ ⁽¹⁾, ce mouvement de repos apparent étant déterminé par la vitesse de glissement de $P_1 P_2$ sur la courbe Γ , la position du fil à l'instant t est obtenue de la manière suivante : de la vitesse de glissement on déduit la position à l'instant t du fil auxiliaire $P'_1 P'_2$; considérons les diverses développantes de Γ et les arcs de ces courbes compris entre les tangentes $P'_1 T'_1$, $P'_2 T'_2$ en $P'_1 P'_2$ à Γ ; le fil sera sur la développante de Γ telle que son arc $M_1 M_2$ compris entre les tangentes $P'_1 T'_1$, $P'_2 T'_2$ soit égal à la longueur du fil entre les molécules considérées M_1 , M_2 .

Le mouvement que nous nous proposons d'étudier sera donc déterminé par deux fonctions du temps t , l'une donnant la vitesse de glissement du fil auxiliaire $P_1 P_2$ sur Γ , l'autre déterminant à chaque instant la développante suivant laquelle le fil est disposé à cet instant.

Remarquons que si nous considérons une courbe dont les coordonnées x_1, y_1, z_1 sont exprimées au moyen des formules de M. de Montcheuil employant les fonctions C et D du paramètre u , en liant les variables s_1 et t à u par la relation ⁽²⁾

$$s_1 = D(u) + D_1(t).$$

Nous pouvons envisager un fil ayant un mouvement de repos apparent

⁽¹⁾ Soumis par conséquent à des forces convenables pour qu'il en soit ainsi.

⁽²⁾ s_1 étant, comme toujours, la longueur du fil comptée depuis une molécule déterminée du fil jusqu'à l'élément de coordonnées x_1, y_1, z_1 .

sur cette courbe avec une vitesse de glissement $-\frac{dD_1}{dt}$, ce fil étant homogène et inextensible.

D'autre part, si x_1, y_1, z_1 désignent les coordonnées d'un point de la courbe Γ ; σ_1 son arc compté à partir d'un point géométrique fixe sur Γ ; k une constante arbitraire, il est clair qu'on a $\sigma_1 = D$ à une constante près et que par conséquent nous pouvons écrire, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ désignant les cosinus directeurs de la tangente à Γ au point x_1, y_1, z_1 ; x, y, z étant les coordonnées d'un point d'une développante,

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (k - \sigma_1) \alpha_1, \\ y &= y_1 + (k - \sigma_1) \beta_1, \\ z &= z_1 + (k - \sigma_1) \gamma_1. \end{aligned}$$

Si nous revenons au problème que nous nous proposons, il est bien évident que la constante k sera une fonction du temps t . En exprimant les coordonnées x_1, y_1, z_1 au moyen des formules de M. de Montcheuil en y adjoignant la relation

$$s_1 = D(u) + D_1(t),$$

nous aurons tenu compte de toutes les hypothèses, sauf une. Il nous restera encore à exprimer que le fil est inextensible; nous verrons plus loin comment nous écrirons cette condition.

Supposons donc les coordonnées x_1, y_1, z_1 exprimées au moyen des formules de M. de Montcheuil que nous avons déjà utilisées, soit θ une fonction de t à déterminer; nous aurons alors, pour les coordonnées d'un point du fil, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (\theta - D) \alpha_1, \\ y &= y_1 + (\theta - D) \beta_1, \\ z &= z_1 + (\theta - D) \gamma_1, \\ s_1 &= D + D_1. \end{aligned}$$

Ces formules nous donnent ainsi les expressions de x, y, z en fonction de u et t .

Calculons les dérivées x', y', z' par rapport à u de x, y, z :

$$\begin{aligned} x' &= (\theta - D) \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = (\theta - D) \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} \frac{ds_1}{\partial u} = \frac{(\theta - D) \alpha'_1 D'}{\rho_1}, \\ y' &= \frac{(\theta - D) \beta'_1 D'}{\rho_1}, \quad z' = \frac{(\theta - D) \gamma'_1 D'}{\rho_1}, \end{aligned}$$

$\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ désignant les cosinus directeurs de la normale principale au point x_1, y_1, z_1 de Γ dirigée vers le centre de courbure.

Nous déduisons de là

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{(\theta - D)}{\rho_1} D'.$$

Calculons maintenant les composantes $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ de la vitesse et de l'accélération d'un point du fil :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} x';$$

de la relation

$$s_1 = D + D_1$$

nous déduisons

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \alpha_1 - \frac{dD_1}{dt} \frac{(\theta - D)}{\rho_1} \alpha'_1, & \frac{dy}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \beta_1 - \frac{dD_1}{dt} \frac{\theta - D}{\rho_1} \beta'_1, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \gamma_1 - \frac{dD_1}{dt} \frac{\theta - D}{\rho_1} \gamma'_1. \end{aligned}$$

Le carré de la vitesse aura donc pour expression

$$v^2 = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dD_1}{dt} \right)^2 \frac{(\theta - D)^2}{\rho_1^2}.$$

Voyons les valeurs des composantes de l'accélération; $\alpha''_1, \beta''_1, \gamma''_1$ désigneront les cosinus directeurs de la binormale à Γ au point x_1, y_1, z_1 , ρ_1 et τ_1 , les rayons de courbure et de torsion de Γ au même point; nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{dx}{dt} - \frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'} \frac{\partial}{\partial u} \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{d^2\theta}{dt^2} \alpha_1 - \frac{d^2D_1}{dt^2} (\theta - D) \frac{\alpha'_1}{\rho_1} - \frac{dD_1}{dt} \frac{d\theta}{dt} \frac{\alpha'_1}{\rho_1} \\ &\quad - \frac{dD_1}{dt} \left\{ \frac{d\theta}{dt} \frac{\alpha'_1}{\rho_1} - \frac{dD_1}{dt} \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\theta - D}{\rho_1} \right] \frac{\alpha'_1}{D'} + \frac{dD_1}{dt} \frac{\theta - D}{\rho_1} \left(\frac{\alpha_1}{\rho_1} + \frac{\alpha''_1}{\tau_1} \right) \right\}. \end{aligned}$$

A.

Nous aurons deux expressions analogues pour $\frac{d^2 y}{dt^2}$, $\frac{d^2 z}{dt^2}$, il suffit de faire simultanément les deux permutations circulaires xyz , $\alpha\beta\gamma$.

Nous allons maintenant de ces expressions des composantes de l'accélération déduire les équations du mouvement du fil, mais il nous faut auparavant calculer les expressions des neuf cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale, de la binormale du fil; nous les désignerons comme précédemment respectivement par

$$\alpha\beta\gamma, \quad \alpha'\beta'\gamma', \quad \alpha''\beta''\gamma''.$$

Ce calcul fait, nous pourrons écrire les trois équations du mouvement en remplaçant les quantités calculées par leurs valeurs dans les équations bien connues.

Voyons les expressions de α , β , γ ; α' , β' , γ' ; α'' , β'' , γ'' :

$$\begin{aligned} \alpha &= x' \frac{\partial u}{\partial s} = \alpha'_1, & \beta &= \beta'_1, & \gamma &= \gamma'_1; \\ \alpha' &= \rho \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \rho \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} = \rho \frac{\partial \alpha'_1}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{-\rho \rho_1}{\theta - \mathbf{D}} \left(\frac{\alpha_1}{\rho_1} + \frac{\alpha''_1}{\tau_1} \right), \\ \beta' &= \frac{-\rho \rho_1}{\theta - \mathbf{D}} \left(\frac{\beta_1}{\rho_1} + \frac{\beta''_1}{\tau_1} \right), & \gamma' &= \frac{-\rho \rho_1}{\theta - \mathbf{D}} \left(\frac{\gamma_1}{\rho_1} + \frac{\gamma''_1}{\tau_1} \right); \\ \alpha'' &= \beta \gamma' - \gamma \beta' = \frac{\rho \rho_1}{\theta - \mathbf{D}} \left(\frac{\alpha'_1}{\rho_1} - \frac{\alpha_1}{\tau_1} \right), \\ \beta'' &= \frac{\rho \rho_1}{\theta - \mathbf{D}} \left(\frac{\beta'_1}{\rho_1} - \frac{\beta_1}{\tau_1} \right), & \gamma'' &= \frac{\rho \rho_1}{\theta - \mathbf{D}} \left(\frac{\gamma'_1}{\rho_1} - \frac{\gamma_1}{\tau_1} \right). \end{aligned}$$

Remarquons de plus que de là nous tirons la relation suivante entre les rayons de courbure ρ et ρ_1 et de torsion τ_1 :

$$\frac{\rho^2 \rho_1^2}{(\theta - \mathbf{D})^2} \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\tau_1^2} \right) = 1.$$

Nous allons ainsi pouvoir écrire les trois équations du mouvement. La première équation du mouvement sera

$$\frac{1}{\rho_1} \left[-\frac{d^2 \mathbf{D}_1}{dt^2} (\theta - \mathbf{D}) - 2 \frac{d\mathbf{D}_1}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] + \frac{1}{\mathbf{D}'} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\theta - \mathbf{D}}{\rho_1} \right\} \left[\frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t} \right]^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} + \Phi.$$

Quant à la deuxième, ce sera

$$-\frac{\rho\rho_1}{\theta-D}\left\{\frac{d^2\theta}{dt^2}\frac{1}{\rho_1}-\left(\frac{dD_1}{dt}\right)^2\frac{\theta-D}{\rho_1}\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\tau_1^2}\right)\right\}=\frac{T}{m\rho}+\Psi.$$

La troisième s'écrit

$$\frac{-\rho\rho_1}{\theta-D}\frac{d^2\theta}{dt^2}\frac{1}{\tau_1}=X.$$

Cette dernière devient, en vertu de la relation écrite précédemment,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\frac{1}{\tau_1}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\tau_1^2}}}=X.$$

Telles sont les équations que doivent vérifier les forces extérieures, les éléments de la courbe Γ et les fonctions θ et D_1 .

Ces dernières quantités doivent encore vérifier une autre relation; car il nous reste à exprimer que le fil est inextensible, c'est-à-dire que la longueur d'un arc s de la forme du fil compris entre deux points déterminés du fil est indépendante du temps t . Si nous considérons la longueur d'un arc s , pris sur la courbe Γ du fil auxiliaire animé d'un mouvement de repos apparent, cet arc est indépendant du temps puisque ce fil auxiliaire est inextensible. Si donc nous exprimons que la dérivée de l'arc s prise par rapport au temps en supposant s , constant est nulle, nous aurons bien exprimé que le fil est inextensible.

Nous aurons donc à écrire que $\frac{ds}{dt}$ est nul, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial s}{\partial t}=0;$$

or nous avons

$$s_1=D+D_1,$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, c'est

qu'on ait

$$-\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \frac{dD_1}{dt} - \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{dD_1}{dt} \right] + \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial t} = 0,$$

$$-\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial t} \frac{dD_1}{dt} - \frac{\partial s}{\partial u} \frac{d^2 D_1}{dt^2} + \frac{\partial^2 s}{dt^2} = 0.$$

Nous avons vu précédemment qu'on avait

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\theta - D}{\rho_1} D',$$

d'où nous tirons, Θ étant une fonction de t ,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial t} = \frac{d\theta}{dt} \frac{D'}{\rho_1}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{d\theta}{dt} \int \frac{D'}{\rho_1} du + \Theta, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{d^2 \theta}{dt^2} \int \frac{D'}{\rho_1} du + \frac{d^2 \Theta}{dt^2}.$$

Les relations précédentes s'écrivent de la manière suivante :

$$(A) \quad \begin{cases} -\frac{dD_1}{dt} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\theta - D}{\rho_1} D' \right\} + \frac{(\theta - D) D''}{\rho_1 D'} \frac{dD_1}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \frac{D'}{\rho_1} = 0, \\ \frac{d^2 \Theta}{dt^2} - \frac{1}{\rho_1} \frac{dD_1}{dt} \frac{d\theta}{dt} - \frac{\theta - D}{\rho_1} \frac{d^2 D_1}{dt^2} + \frac{d^2 \theta}{dt^2} \int \frac{D'}{\rho_1} du = 0. \end{cases}$$

Ces relations nous montrent d'une façon évidente l'impossibilité du problème, si nous supposons que la fonction $D_1(t)$ soit une constante, car alors nous devons avoir

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Le fil est alors en équilibre sur une courbe développante fixe de la courbe Γ ; les forces extérieures devront, bien entendu, être telles que l'équilibre puisse avoir lieu sur une telle courbe si la courbe Γ est donnée. Si au contraire les forces extérieures étaient données, la courbe Γ est une développée de la courbe obtenue en cherchant la figure d'équilibre du fil soumis à ces forces.

Pour résoudre le problème proposé, il faut donc donner aux composantes Φ , Ψ , X des forces extérieures; aux fonctions de u , C et D , et

aux fonctions du temps D_1 et θ des valeurs telles qu'elles vérifient les trois équations du mouvement et le système de relations (A) que nous venons d'obtenir.

Remarquons que ces relations (A) sont indépendantes de toute question mécanique; ce système (A) résout le problème géométrique suivant : Existe-t-il des courbes telles que l'on puisse trouver des développantes remplissant les conditions énoncées. S'il en existe, les déterminer ainsi que la manière dont il faut associer le choix de ces développantes au mouvement de glissement des points que nous avons appelés $P_1, P_2, \dots$ sur Γ .

Le système (A) peut s'écrire de la manière suivante; nous dérivons la deuxième relation par rapport à u de manière à faire disparaître la fonction inconnue Θ :

$$(A') \quad \begin{cases} -\frac{dD_1}{dt} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\theta - D}{\rho_1} \right\} + \frac{d\theta}{dt} \frac{D'}{\rho_1} = 0, \\ -\frac{dD_1}{dt} \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\rho_1} - \frac{d^2 D_1}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\theta - D}{\rho_1} \right\} + \frac{d^2 \theta}{dt^2} \frac{D'}{\rho_1} = 0. \end{cases}$$

La deuxième relation de ce système est une conséquence de la première, car son premier membre est la dérivée par rapport à t du premier membre de la première équation.

Il nous reste donc la première relation que nous pouvons écrire de la manière suivante :

$$-\frac{dD_1}{dt} \theta \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\rho_1} + \frac{dD_1}{dt} D \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\rho_1} + \left(\frac{dD_1}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \right) \frac{D'}{\rho_1} = 0.$$

Nous pouvons encore la mettre sous la forme suivante :

$$(1) \quad A_1 T_1 + A_2 T_2 + A_3 T_3,$$

en posant

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\rho_1}, & A_2 &= D \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\rho_1}, & A_3 &= \frac{D'}{\rho_1}, \\ T_1 &= -\theta \frac{dD_1}{dt}, & T_2 &= \frac{dD_1}{dt}, & T_3 &= \frac{dD_1}{dt} + \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}$$

Remarquons que les A ne peuvent être nuls tous trois.

Si nous supposons qu'il existe une relation unique à coefficients constants entre les A , homogène et linéaire,

$$\lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3 = 0,$$

nous en déduisons qu'on aurait

$$-\theta \frac{dD_1}{dt} = \frac{dD_1}{dt} = \frac{dD_1}{dt} + \frac{d\theta}{dt};$$

ce qui nous donnerait, en supposant $\frac{dD_1}{dt}$ différent de zéro, θ égal à une constante; nous laissons de côté ce cas qui sera envisagé plus loin dans une application du problème.

Il nous faut donc faire l'hypothèse que les A sont liés par deux relations, ce qui revient à dire que les T sont liés par une relation unique à coefficients constants, homogène et linéaire,

$$\lambda T_1 + \mu T_2 + \nu T_3 = 0;$$

ce qui nous donne pour les A

$$\frac{A_1}{\lambda} = \frac{A_2}{\mu} = \frac{A_3}{\nu},$$

ce qui s'écrit

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\rho_1}}{\lambda} = \frac{D \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\rho_1} \right)}{\mu} = \frac{D'}{\nu}.$$

Ces relations ne sont possibles que si l'on a

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0.$$

Nous en déduisons par conséquent que les conditions cherchées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\rho_1} \right) &= 0, \\ \frac{dD_1}{dt} + \frac{d\theta}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

La courbure de la courbe Γ est constante et de plus la vitesse de glissement du fil auxiliaire sur Γ est égale à la dérivée par rapport à t de la fonction qui définit la développante.

Une dernière hypothèse aurait pu être faite au sujet de la relation (1); nous aurions pu supposer que les T soient tous nuls, ce qui nous ramènerait à une étude d'équilibre puisqu'on aurait

$$\frac{dD_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Nous supposerons ce cas écarté.

Les conditions que nous venons d'obtenir pourraient se trouver directement par la Géométrie indépendamment de toute question mécanique, comme nous le verrons.

Nous allons étudier ce qui se passe en supposant la composante X successivement fonction de t seulement, de u seulement, ou nulle.

30. Supposons que la composante X ne dépende pas de u et soit par conséquent une fonction du temps seulement; la troisième équation du mouvement nous donne immédiatement

$$\frac{1}{\tau_1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\tau_1^2}}} = K,$$

ce qui nous indique que dans ce cas la courbe invariable doit être une hélice.

Or nous venons de voir que la courbe Γ doit être telle que sa courbure soit constante; nous en concluons donc que la courbe Γ doit être une hélice circulaire.

De la troisième équation du mouvement nous déduisons en outre la détermination de la fonction θ :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + KX = 0.$$

Par deux quadratures successives nous obtenons ainsi la fonction θ .

Une fois la fonction θ connue, la relation

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{dD_1}{dt} = 0$$

nous donnera la fonction $D_1(t)$.

Nous pourrions alors remplacer toutes les quantités qui figurent dans les deux premières équations du mouvement par les valeurs obtenues; nous aurons ainsi deux équations dans lesquelles figureront Φ , Ψ , et la tension T ; par l'élimination de T entre ces deux relations, nous aurons une relation que doivent remplir les composantes Φ et Ψ des forces extérieures.

Nous venons de voir que si la composante X des forces extérieures ne dépend pas de u , le mouvement est possible pour un choix convenable des deux autres composantes Φ et Ψ et que la courbe fixe en forme et en position était une hélice circulaire.

Inversement, si la courbe fixe en forme et en position est une hélice circulaire, le problème est possible, mais la composante X des forces extérieures ne doit dépendre que du temps; les deux autres composantes Φ et Ψ sont assujetties à une condition.

Remarquons que dans ce cas les formes du fil sont dans des plans parallèles, perpendiculaires aux génératrices du cylindre de révolution sur lequel est tracée l'hélice. La surface engendrée par le fil est une surface hélicoïde développable engendrée par les tangentes à l'hélice circulaire.

31. Supposons que la composante X soit fonction de u seulement; nous en déduisons alors que, K étant une constante, nous avons les deux relations suivantes :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = k, \quad \tau_1 X \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\tau_1^2}} = k.$$

Comme nous avons vu que $\frac{1}{\rho_1}$ est constant, cette dernière relation nous donne la torsion de la courbe Γ . La courbe Γ est donc déterminée.

Les fonctions θ et D_1 sont déterminées par les relations

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = k, \quad \frac{d\theta}{dt} + \frac{dD_1}{dt} = 0.$$

Le fil auxiliaire glisse sur Γ d'un mouvement uniformément accéléré. Quant aux deux composantes Φ et Ψ elles doivent vérifier une relation obtenue par l'élimination de la tension entre les deux premières équations du mouvement. Par conséquent, si l'on suppose la composante X fonction de u seulement, le problème proposé est possible; la courbe fixe est déterminée, ainsi que le mouvement; les composantes Φ et Ψ doivent être convenablement choisies.

Remarque. — Si la composante X était indépendante du temps, nous aurions, pour déterminer le mouvement et la courbe fixe, les équations

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = k, \quad \tau_1 \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\tau_1^2}} = k', \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\rho_1} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} + \frac{dD_1}{dt} = 0,$$

k et k' étant des constantes; ce qui revient à dire que la courbe fixe est une hélice circulaire, le fil auxiliaire glisse sur Γ d'un mouvement uniformément accéléré, et inversement.

32. Supposons enfin la composante X nulle; il n'y a pas de force binormale; alors de deux choses l'une, ou bien on a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,$$

ou bien c'est $\frac{1}{\tau_1}$ qui est nul.

1° Supposons $\frac{1}{\tau_1}$ nul, la courbe fixe Γ est plane; en vertu des conditions trouvées précédemment, nous voyons que cette courbe Γ est un cercle; le mouvement a lieu de telle manière qu'on ait

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{dD_1}{dt} = 0.$$

Il faudra en outre mettre pour une des deux fonctions θ ou D_1 , pour Φ et Ψ des expressions vérifiant la relation obtenue toujours de la même manière en éliminant T entre les deux équations du mouvement où elle figure.

2° Supposons que, $\frac{1}{\tau_1}$ n'étant pas nul, nous ayons la relation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0;$$

nous en déduisons immédiatement qu'on a

$$\frac{d^2 D_1}{dt^2} = 0;$$

le mouvement de glissement sur Γ du fil auxiliaire est uniforme.

Nous voyons qu'inversement, si l'on suppose le mouvement de glissement sur Γ du fil auxiliaire uniforme, la composante X est nulle.

Dans le mouvement envisagé, la condition nécessaire et suffisante pour que ce fil auxiliaire glisse sur Γ d'un mouvement uniforme, c'est qu'il n'y ait point de force binormale.

Le mouvement considéré est possible s'il n'y a pas de force binormale et si la courbe fixe Γ n'est pas plane; la fonction θ est une fonction linéaire du temps; il en est de même de D_1 ; la courbe fixe Γ a un rayon de courbure constant, et l'on a de plus

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{dD_1}{dt} = 0.$$

Les composantes des forces extérieures devront toujours vérifier une relation obtenue par l'élimination de la tension entre les deux premières équations du mouvement.

33. Remarquons que, dans le problème que nous venons de traiter, la forme du fil est une ligne de courbure de la surface engendrée.

En effet, la normale à la surface engendrée a pour cosinus directeurs $\alpha''_1, \beta''_1, \gamma''_1$; sa direction est donc celle de la binormale de la courbe invariable Γ qui fait un angle constant avec celle de la normale principale; la courbe forme du fil est donc une ligne de courbure, la surface est développable, son arête de rebroussement est la courbe invariable Γ ; on aurait pu dire que les formes du fil étaient les lignes de courbure, puisqu'elles étaient les trajectoires orthogonales des génératrices.

La surface engendrée par le fil est donc une surface développable ayant pour arête de rebroussement la courbe invariable Γ et pour lignes de courbure les formes du fil; c'est une particularité remarquable du problème que nous venons d'étudier.

34. Comme application, nous allons nous proposer de rechercher

s'il existe des courbes Γ telles que, si l'on fait glisser sur elles une portion de fil inextensible de longueur bien déterminée et que l'on considère une développante particulière, les tangentes aux extrémités de ce fil auxiliaire déterminent sur cette développante un arc de longueur invariable quelle que soit la position de la portion de fil.

Il y aura dans cette recherche deux points à élucider : comment doit-on faire glisser le fil sur la courbe et quelle est cette courbe.

Ce problème se résoudra au moyen de nos équations (A) qui expriment l'inextensibilité en supposant la fonction θ constante ⁽¹⁾.

En effet nous aurons ainsi exprimé que l'arc d'une développante particulière compris entre deux tangentes de la courbe fixe Γ de tout à l'heure qui roulent avec la même vitesse sur cette courbe Γ est indépendant du temps.

Nos relations deviennent alors

$$\begin{aligned} \vartheta = k, \quad \frac{dD_1}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\theta - D}{\rho_1} D' \right\} - \frac{(\theta - D)}{\rho_1} D'' \right] &= 0, \\ \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \frac{d^2 D_1}{dt^2} \frac{\theta - D}{\rho_1} &= 0; \end{aligned}$$

ce qui nous donne, en supposant $\frac{dD_1}{dt}$ différent de zéro, hypothèse qui ne correspond plus à notre problème,

$$\vartheta = k, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{k - D}{\rho_1} \right\} = 0.$$

Ce qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Si le problème proposé est possible, le fil auxiliaire envisagé glisse d'un mouvement quelconque sur la courbe Γ . Cette courbe Γ est telle que son rayon de courbure est donné en fonction de s par une expression linéaire ⁽²⁾; de cette expression résulte une développante répondant à la question.

Ce résultat aurait pu s'écrire plus rapidement en remarquant qu'on a

(¹) Ce problème nous montre que dans le cas étudié précédemment, en supposant $\frac{d\theta}{dt} = 0$, on aurait pu obtenir pour des forces extérieures convenables un mouvement de repos apparent.

(²) Ces courbes sont des spirales logarithmiques.

les expressions suivantes des composantes de la vitesse

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \alpha_1 - \frac{dD_1}{dt} \frac{\theta - D}{\rho_1} \alpha'_1, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \beta_1 - \frac{dD_1}{dt} \frac{\theta - D}{\rho_1} \beta'_1, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \gamma_1 - \frac{dD_1}{dt} \frac{\theta - D}{\rho_1} \gamma'_1.\end{aligned}$$

Pour qu'il puisse y avoir mouvement de repos apparent d'un fil inextensible, il faut tout d'abord que la vitesse soit dirigée suivant la tangente à la développante, ce qui donne

$$\frac{d\theta}{dt} = 0;$$

il faut de plus que la vitesse ne dépende que du temps, ce qui donne

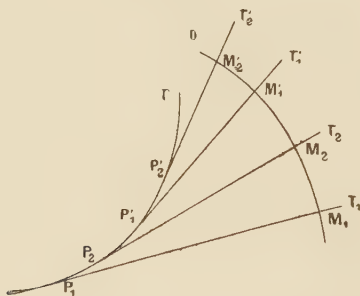
$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\theta - D}{\rho_1} = 0.$$

Ce problème peut encore se résoudre directement.

Considérons un point P_1 de Γ et un point infiniment voisin P_2 tel que l'arc de Γ soit égal à ds_1 .

Considérons la développante D répondant à la question, soit ds l'arc de D correspondant à l'arc $P_1 P_2$.

Fig. 3.



Faisons rouler sur la courbe Γ les deux tangentes $P_1 T_1$, $P_2 T_2$, de manière que P_1 et P_2 occupent les positions P'_1 , P'_2 ; l'arc de Γ , $P'_1 P'_2$, qui est égal à $P_1 P_2$, a pour valeur ds_1 ; quant à l'arc de D , $M'_1 M'_2$, il est

égal à $M_1 M_2$, puisque la développante D. répond à la question. Soient $d\alpha$ l'angle des deux tangentes infiniment voisines, $P_1 T_1, P_2 T_2$; $d\alpha'$ l'angle des deux tangentes, $P'_1 T'_1, P'_2 T'_2$; nous avons

$$M_1 M_2 = P_1 M_1 d\alpha,$$

$$M'_1 M'_2 = P'_1 M'_1 d\alpha'.$$

Appelons C la valeur de la constante dont dépendent les développantes pour la courbe D.

Appelons h la longueur de l'arc $P_1 P'_1$, s_1 désignant la longueur de l'arc de Γ depuis un point fixe de Γ jusqu'à P_1 ; nous avons alors

$$P_1 M_1 = C - s_1,$$

$$P'_1 M'_1 = C - s_1 - h.$$

D'autre part, comme le rayon de courbure de Γ est une fonction de l'arc de Γ , les rayons de courbure de Γ en P_1 et P'_1 sont $\rho(s_1)$ et $\rho(s_1 + h)$, et nous avons

$$\rho(s_1) = \frac{ds_1}{d\alpha}, \quad \rho(s_1 + h) = \frac{ds_1}{d\alpha'}.$$

En écrivant que $M_1 M_2$ est égal à $M'_1 M'_2$, il vient donc

$$\frac{C - s_1}{\rho(s_1)} = \frac{C - s_1 - h}{\rho(s_1 + h)};$$

le premier membre est une fonction de s_1 , qui ne change pas quand on y remplace s_1 par $s_1 + h$ quel que soit h ; donc on a

$$(C - s_1) \frac{d\rho}{ds_1} + \rho = 0,$$

ou bien

$$\rho = k(C - s_1),$$

ce qui nous donne le même résultat que par les méthodes précédentes.

Remarque. — Le problème plus général de la recherche des courbes telles qu'à des arcs égaux pris sur elles on puisse faire correspondre des arcs de développantes égaux entre eux, ces développantes étant différentes, peut aussi se résoudre directement.

Il faut répéter les calculs que nous venons de faire précédemment, en remarquant que l'arc $M'_1 M'_2$ est pris dans ce cas sur une développante correspondant à une valeur de la constante dont dépendent les développantes, différente de C , soit $C + k$, ce qui nous conduit à l'équation

$$\frac{C - s_1}{\rho(s_1)} = \frac{C + k - s_1 - h}{\rho(s_1 + h)};$$

d'où nous tirons la valeur de k :

$$k = \left[\frac{\rho(s_1 + h)}{\rho(s_1)} - 1 \right] (C - s_1) + h.$$

Cette valeur de k doit être la même, quel que soit s_1 , pour une valeur donnée de h ; donc sa valeur est la même pour la valeur s_1 que pour la valeur zéro; on a donc

$$\left(\frac{\rho(s_1 + h)}{\rho(s_1)} - 1 \right) (C - s_1) = \left(\frac{\rho(h)}{\rho(0)} - 1 \right) C.$$

Cette relation doit avoir lieu, quel que soit s_1 , et quel que soit h ,

Si, dans cette relation, on fait $s_1 = C$, il vient

$$\left[\frac{\rho(C + h)}{\rho(C)} - 1 \right] 0 = \left(\frac{\rho(h)}{\rho(0)} - 1 \right) C.$$

Si $\rho(C + h)$ n'est pas infini, ou $\rho(C)$ nul, on doit avoir forcément

$$\rho(h) = \rho(0);$$

ce qui nous donne le résultat que la courbure est constante; de plus, on a alors

$$k = h.$$

Ceci nous donne les conclusions que nous avons obtenues à la fin du paragraphe 29. Il n'y aurait d'exception que si $\rho(C)$ était nul, c'est-à-dire que le point correspondant à une longueur d'arc égal à C est point de rebroussement de la courbe fixe; mais comme on peut changer la constante C en changeant l'origine des arcs, et comme la développante change de position, on peut supposer qu'on ait $\rho(C)$ différent de zéro.

XI.

Problème.

35. Nous allons nous proposer un problème tout à fait analogue au précédent, seulement il s'agira ici de développées, tandis qu'auparavant il était question de développantes.

Considérons une courbe fixe en forme et en position Γ et ses différentes développées D .

Ces développées, dépendant d'une constante arbitraire, sont en nombre infini.

Dans le mouvement que nous allons définir, la courbe forme du fil est à chaque instant une développée D de Γ .

De plus, si nous considérons la position à l'instant initial du fil, il est disposé suivant une développée de Γ et l'arc $M_1 M_2$ de cette développée, qui coïncide avec une portion de fil, correspond à un certain arc $P_1 P_2$ de Γ . Pour obtenir la position du fil à l'instant t , nous ferons glisser un fil auxiliaire, inextensible, homogène, de longueur $P_1 P_2$, sur Γ avec une certaine vitesse; nous aurons ainsi une position $P'_1 P'_2$; la développée sera choisie parmi l'ensemble des développées, de telle manière que son arc compris entre deux points, correspondant à $P'_1 P'_2$ pris dans des plans normaux à P'_1 et P'_2 , soit égal à la longueur du fil $M_1 M_2$.

Tel est le mouvement que nous allons étudier, qui sera déterminé, la courbe Γ étant connue, par deux fonctions de t , l'une donnant la vitesse de glissement du fil auxiliaire $P_1 P_2$ sur Γ , l'autre déterminant à chaque instant la développée suivant laquelle le fil est disposé à cet instant.

Comme dans le problème précédent, nous introduirons les fonctions C et D du paramètre u , pour déterminer la courbe Γ ; nous lierons les variables s_1 et t à u par la relation

$$s_1 = D(u) + D_1(t),$$

et ainsi notre fil auxiliaire glissera sur Γ avec une vitesse $-\frac{dD_1}{dt}$.

La constante arbitraire, dont dépendent les développées, sera ici une fonction θ du temps t . Nous appellerons ω l'angle de la normale principale de la courbe invariable avec la tangente à la développée ; nous savons que ω est tel qu'on a la relation

$$d\omega = \frac{d\sigma_1}{\tau_1} + \frac{d\theta}{dt} dt,$$

σ_1 étant l'arc compté sur Γ à partir d'un point géométrique, fixe quand le temps varie ; or il est clair que nous avons $\sigma_1 = D$ à une constante près ; nous aurons donc

$$d\omega = \frac{D'}{\tau_1} du + \frac{d\theta}{dt} dt.$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \rho_1 \alpha'_1 + \rho_1 \alpha''_1 \tan \omega, \\ y &= y_1 + \rho_1 \beta'_1 + \rho_1 \beta''_1 \tan \omega, \\ z &= z_1 + \rho_1 \gamma'_1 + \rho_1 \gamma''_1 \tan \omega. \end{aligned}$$

Nous avons, en dérivant par rapport à u ,

$$\begin{aligned} x' &= \left(\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega \right) (\alpha'_1 + \alpha''_1 \tan \omega), \\ y' &= \left(\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega \right) (\beta'_1 + \beta''_1 \tan \omega), \\ z' &= \left(\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega \right) (\gamma'_1 + \gamma''_1 \tan \omega). \end{aligned}$$

Nous en déduisons le rapport $\frac{ds}{du}$:

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega}{\cos \omega}.$$

Calculons maintenant les quantités $\alpha \beta \gamma$, $\alpha' \beta' \gamma'$, $\alpha'' \beta'' \gamma''$ cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale, de la binormale de la forme du fil :

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} = \alpha'_1 \cos \omega + \alpha''_1 \sin \omega.$$

Nous avons de même des expressions analogues pour β et γ :

$$\alpha' = \rho \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \rho \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} = \rho \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{-D' \rho \cos \omega}{\left(\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega\right) \rho_1} \alpha_1.$$

Par la permutation circulaire $\alpha\beta\gamma$, nous obtenons les valeurs de β' et γ' .

Nous déduisons de là

$$\frac{\rho^2 D'^2 \cos^2 \omega}{\left(\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega\right)^2 \rho_1^2} = 1.$$

Nous trouvons de suite l'expression de α'' :

$$\alpha'' = \alpha'_1 \sin \omega - \alpha''_1 \cos \omega,$$

avec des valeurs analogues pour β'' et γ'' .

Calculons maintenant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ composantes de la vitesse suivant les trois axes fixes,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{\rho_1}{\cos^2 \omega} \alpha''_1 - \frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'} \left(\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega\right) (\alpha'_1 + \alpha''_1 \tan \omega);$$

posons

$$A = \frac{d\theta}{dt} \frac{\rho_1}{\cos^2 \omega}, \quad B = \frac{dD_1}{dt} \frac{\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega}{D' \cos \omega};$$

il vient alors

$$\frac{dx}{dt} = A \alpha''_1 - B (\alpha'_1 \cos \omega + \alpha''_1 \sin \omega)$$

avec des expressions analogues pour $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$.

La vitesse sera donnée par

$$v^2 = A^2 + B^2 - 2AB \sin \omega.$$

Tirons de là $\frac{d^2x}{dt^2}$ composante suivant Ox de l'accélération

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial A}{\partial t} \alpha''_1 - \frac{\partial B}{\partial t} (\alpha'_1 \cos \omega + \alpha''_1 \sin \omega) - B \frac{d\theta}{dt} (\alpha''_1 \cos \omega - \alpha'_1 \sin \omega) \\ &\quad - \frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'} \left\{ \frac{\partial A}{\partial u} \alpha''_1 + \frac{AD'}{\tau_1} \alpha'_1 - \frac{\partial B}{\partial u} (\alpha'_1 \cos \omega + \alpha''_1 \sin \omega) + \frac{BD' \cos \omega}{\rho_1} \alpha_1 \right\}. \end{aligned}$$

A.

Les valeurs de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ s'obtiennent par la permutation circulaire de $\alpha\beta\gamma$.

La première équation du mouvement est donc

$$\frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial s} + \Phi = \frac{\partial A}{\partial t} \sin \omega - \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial D_1}{\partial t}}{D'} - \frac{A \frac{dD_1}{dt}}{\tau_1} \cos \omega - \frac{\frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial D_1}{\partial t}}{D'} \sin \omega.$$

La deuxième équation du mouvement est la suivante :

$$- \frac{B \frac{dD_1}{dt} \cos \omega}{\rho_1} = \frac{T}{m \rho} + \Psi.$$

Quant à la troisième, elle s'écrit

$$B \frac{d\theta}{dt} - \frac{\partial A}{\partial t} \cos \omega - \frac{A \frac{dD_1}{dt}}{\tau_1} \sin \omega + \frac{\frac{\partial A}{\partial u} \frac{dD_1}{dt}}{D'} \cos \omega = X.$$

Comme dans le problème précédent, il nous reste à exprimer que le fil est inextensible. Par des raisonnements tout à fait analogues à ceux faits à l'occasion de la même recherche dans le problème précédent, nous sommes amenés aux deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} - \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'} - \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'} \right] + \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial t} &= 0, \\ - \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial t} \frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'} - \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'} \right] + \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= 0; \end{aligned}$$

ce qui donne ici

$$(B) \left\{ \begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega}{\cos \omega} \right\} \frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'} + \frac{\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega}{\cos \omega} \frac{\frac{dD_1}{dt} D''}{D'^2} \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega}{\cos \omega} \right\} = 0, \\ & - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega}{\cos \omega} \right\} \frac{\frac{dD_1}{dt}}{D'} - \frac{\left(\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega \right) \frac{d^2 D_1}{dt^2}}{\cos \omega D'} \\ & \quad + \int \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega}{\cos \omega} \right\} du + \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces relations nous montrent, comme précédemment, que si la fonction $D_1(t)$ est une constante, il en est de même de θ ; nous sommes, par conséquent, ramenés à une question d'équilibre; nous n'envisagerons point ce cas.

Ces relations (B) sont absolument indépendantes de toute question mécanique; elles résolvent le problème géométrique suivant: Existe-t-il des courbes telles qu'on puisse trouver des développées remplissant les conditions énoncées. S'il en existe, les déterminer ainsi que la manière dont il faut associer le choix des développées au glissement des points P sur Γ .

Si la courbe Γ et les fonctions de t , D_1 et θ , sont telles qu'elles vérifient le système (B), le problème sera possible pour des lois de forces vérifiant les équations du mouvement dans lesquelles on a remplacé les quantités qui y entrent par les expressions satisfaisant à (B).

36. Examinons le cas où la courbe fixe en forme et en fonction est plane; on a alors

$$\frac{1}{\tau_1} = 0, \quad \omega = \theta.$$

Voyons ce que deviennent les relations (B); elles s'écrivent

$$\begin{aligned} -\frac{\rho'_1 \sin \theta}{\cos^2 \theta D'} \frac{d\theta}{dt} \frac{dD_1}{dt} - \frac{\rho'_1 D''}{D'^2 \cos \theta} \frac{dD_1}{dt} - \rho'_1 \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dt} &= 0, \\ \frac{\rho'_1}{D'} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{dD_1}{dt} - \frac{\rho'_1}{D' \cos \theta} \frac{d^2 D_1}{dt^2} + \rho_1 \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \frac{1}{\cos \theta} \right\} + \frac{d^2 \Theta}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

La première relation peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\rho'_1}{D'} \right] \frac{dD_1}{dt} - \rho'_1 \tan \theta \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Si les quantités $\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\rho'_1}{D'} \right]$ et ρ'_1 sont indépendantes, il vient alors

$$\frac{dD_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0;$$

c'est le cas de l'équilibre. Écartons cette hypothèse ainsi que celle qui supposerait ρ'_1 nul, et supposons donc le seul cas qui rentre effecti-

vement dans le problème que nous examinons, c'est-à-dire qu'on ait, λ étant une constante,

$$\frac{d}{du} \frac{\rho_1'}{D'} + \lambda \rho_1' = 0;$$

ce qui donne par deux intégrations successives, μ et ν étant deux constantes,

$$\frac{\rho_1'}{D'} + \lambda \rho_1 = \mu, \quad \rho_1 = \frac{\mu}{\lambda} + \nu e^{-\lambda D}.$$

Ainsi, pour que le problème soit possible, il faut tout d'abord que la courbe plane soit telle que son rayon de courbure soit de cette forme en fonction de l'arc, c'est-à-dire que la forme de la courbe est donnée.

Cela étant, nous aurons de plus la relation suivante :

$$\lambda \frac{dD_1}{dt} + \tan \theta \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

La seconde relation (B) pourra s'écrire

$$\frac{\rho_1'}{D'} \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{dD_1}{dt} \frac{d\theta}{dt} \tan \theta - \frac{d^2 D_1}{dt^2} \right) + \rho_1 \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{\cos \theta} \right] + \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = 0,$$

ce qui nous donnera la relation

$$\frac{\lambda}{\cos \theta} \left(\frac{dD_1}{dt} \frac{d\theta}{dt} \tan \theta - \frac{d^2 D_1}{dt^2} \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{\cos \theta} \right).$$

Or, on a

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\tan \theta}{\cos \theta} \frac{d\theta}{dt} \right\} = - \frac{d}{dt} \left\{ \lambda \frac{dD_1}{dt} \right\} = - \frac{\lambda}{\cos \theta} \frac{d^2 D_1}{dt^2} + \frac{\lambda \tan \theta}{\cos \theta} \frac{dD_1}{dt} \frac{d\theta}{dt};$$

ce qui nous montre que la deuxième relation (B) nous donne une identité quand on tient compte de la première.

Donc la forme de la courbe, pour que le problème soit possible, est telle qu'on ait

$$\rho_1 = \frac{\mu}{\lambda} + \nu e^{-\lambda s}$$

et, de plus, le mouvement est tel qu'on ait

$$\lambda \frac{dD_1}{dt} + \tan \theta \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Il faudra mettre pour D , et θ des fonctions de t telles que cette relation précédente soit satisfaite ainsi que les équations du mouvement, où les forces extérieures seront convenablement choisies.

37. Remarquons que, dans le problème que nous nous sommes proposé, la surface engendrée par toutes les développées contient la parallèle à la binormale de la courbe fixe et invariable Γ au point P , menée par le centre de courbure correspondant à ce point P ; la normale à la surface engendrée par le fil en un point M , qui doit être perpendiculaire à la binormale de la courbe Γ au point correspondant P et à la tangente à la développée qui est dans le plan normal à la courbe Γ au même point P , a donc même direction que la tangente en P à Γ . La surface est donc développable, ses génératrices rectilignes sont les parallèles aux binormales de Γ menées par les centres de courbure correspondants.

Nous avons vu que la normale principale à la développée en un point M a pour direction la tangente en P à Γ . Ceci nous montre que les développées sont des lignes géodésiques de la surface développable qu'elles engendrent.

Le mouvement considéré a donc la propriété d'être tel que la surface engendrée par le fil soit développable et que sa forme à chaque instant soit une ligne géodésique de cette surface.

38. Comme application, nous allons nous proposer de rechercher s'il existe des courbes Γ telles qu'en faisant glisser sur elles une portion de fil inextensible de longueur bien déterminée et d'autre part en considérant une développée bien déterminée, les normales correspondant aux extrémités de cette portion de fil déterminent sur cette développée un arc de longueur invariable, quelle que soit la position de la portion du fil.

Nous pourrions résoudre ce problème au moyen des équations (B) en supposant la fonction de t , θ , constante.

En supposant qu'on ait

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \theta = h,$$

les équations (B) deviennent

$$\frac{dD_1}{dt} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega}{D' \cos \omega} \right\} = 0, \quad \frac{d^2 D_1}{dt^2} \frac{\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega}{D' \cos \omega} + \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = 0;$$

ce qui nous donne, comme condition à laquelle doivent satisfaire les courbes Γ ,

$$\frac{\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \omega}{D' \cos \omega} = K.$$

Quant à la fonction $D_1(t)$ elle est quelconque.

Par la considération des composantes de la vitesse, en exprimant qu'il y a mouvement de repos apparent, nous aurions pu obtenir ces résultats plus rapidement, comme précédemment.

Remarquons que, dans le cas où la courbe Γ est plane, notre condition devient identique à celle obtenue au problème analogue du Chapitre précédent.

Les courbes répondant à la question sont donc celles qui vérifient la relation

$$\rho'_1 + \frac{\rho_1}{\tau_1} D' \tan \left[\int \frac{D'}{\tau_1} du + h \right] = K D' \cos \left[\int \frac{D'}{\tau_1} du + h \right].$$

La développée pour laquelle la proposition a lieu est alors celle qui correspond à la valeur de la constante arbitraire égale à h .

XII.

Quelques remarques sur la surface engendrée par le fil
et la forme que présente le fil sur cette surface.

39. Nous venons de voir dans ce qui précède des mouvements où la forme du fil ⁽¹⁾ est soit une ligne de courbure, soit une ligne géodésique de la surface que le fil engendre; nous allons dans ce qui va

(1) Le fil est toujours supposé inextensible.

suivre chercher les conditions pour que ce fil soit une ligne asymptotique de cette surface, etc., pour qu'il se meuve de telle manière qu'il vérifie certains énoncés.

Pour cela, nous allons faire usage des produits géométriques et écrire les équations du mouvement sous forme d'équations vectorielles.

Les produits géométriques ont été employés par beaucoup de mathématiciens pour traiter un grand nombre de questions; citons en particulier l'Ouvrage de MM. Burali-Forti et Marcolongo, traduit de l'italien par M. Lattès (*Éléments de calcul vectoriel*: Librairie Hermann, 1910) dans lequel, outre le calcul vectoriel proprement dit, se trouvent de nombreuses applications à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique mathématique. Dans les applications à la Mécanique figure même une application à l'équilibre des fils (*Courbes funiculaires*, p. 132). Nous renvoyons à cet Ouvrage pour tout ce qui touche au calcul vectoriel, aux produits géométriques appelés encore *produits intérieurs* ou *scalaires* (p. 31). Néanmoins, dans ce qui va suivre, nous préférons, pour représenter le produit géométrique, employer, plutôt que celle de M. Burali-Forti (1), la notation de M. Peano (*Calcolo geometrico*; *Die Grundzüge des geometrischen Calculs*) qui représente le produit intérieur des deux vecteurs A et B par

$$A | B.$$

Revenons à notre problème des fils; appelons T, N, B les trois vecteurs de longueur l'unité dirigés respectivement sur les parties positives de la tangente, de la normale principale, de la binormale de la forme du fil, en un point M bien déterminé du fil. Considérons la trajectoire décrite par cet élément du fil et appelons T_1 , N_1 , B_1 les trois vecteurs analogues de longueur l'unité portés respectivement sur les parties positives de la tangente, de la normale principale, de la binormale de cette trajectoire. Soient : v la grandeur de la vitesse de ce point M, ρ et ρ_1 les rayons de courbure des deux courbes qui se coupent en M et qui sont l'une la forme du fil, l'autre la trajectoire du point M.

(1) Voir la Notice historique sur le produit géométrique à la page 220 de l'Ouvrage de M. Burali-Forti.

Les composantes suivant les trois axes fixes de coordonnées de T, N, B sont respectivement $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ en conservant toujours nos mêmes notations.

Nous avons d'autre part, pour le vecteur vitesse $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}$ de composantes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, l'expression

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = v \mathbf{T}_1,$$

et pour le vecteur accélération $\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2}$ de composantes $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ l'expression

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t} \mathbf{T}_1 + \frac{v^2}{\rho_1} \mathbf{N}_1;$$

ces formules bien connues sont expliquées dans le Livre de M. Burati-Forti (p. 118).

Les quatre équations du mouvement (dans lesquelles nous désignerons la tension par H pour éviter les confusions)

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{1}{m} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s} + \Phi, \\ \alpha' \frac{d^2x}{dt^2} + \beta' \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma' \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\mathbf{H}}{m\rho} + \Psi, \\ \alpha'' \frac{d^2x}{dt^2} + \beta'' \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma'' \frac{d^2z}{dt^2} &= \mathbf{X}, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 &= 1, \end{aligned}$$

s'écriront

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} \mathbf{T} | \mathbf{T}_1 + \frac{v^2}{\rho_1} \mathbf{T} | \mathbf{N}_1 &= \frac{1}{m} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} + \Phi, \\ \frac{\partial v}{\partial t} \mathbf{N} | \mathbf{T}_1 + \frac{v^2}{\rho_1} \mathbf{N} | \mathbf{N}_1 &= \frac{\mathbf{T}}{m\rho} + \Psi, \\ \frac{\partial v}{\partial t} \mathbf{B} | \mathbf{T}_1 + \frac{v^2}{\rho_1} \mathbf{B} | \mathbf{N}_1 &= \mathbf{X}. \end{aligned}$$

40. Proposons-nous de rechercher les conditions pour que la forme du fil soit une ligne asymptotique de la surface engendrée.

Remarquons que si la forme du fil est une ligne asymptotique, nous aurons

$$\mathbf{B} | \mathbf{T}_1 = 0,$$

et réciproquement, si l'on a cette relation, la forme du fil sera ligne asymptotique, car son plan osculateur sera tangent à la surface.

La troisième équation nous donne donc

$$\frac{\varphi^2}{\rho_1} B | N_1 = X;$$

par conséquent, pour que la forme du fil soit ligne asymptotique, il faut que la composante binormale des forces extérieures ait pour valeur

$$\frac{\varphi^2}{\rho_1} \cos(B, N_1).$$

Réciproquement, si l'on a cette condition pour la composante binormale des forces extérieures, ou bien la forme du fil est une ligne asymptotique, ou bien les trajectoires des différents points du fil sont décrites d'un mouvement uniforme.

Supposons maintenant que, outre les formes du fil, les trajectoires des différents points soient des lignes asymptotiques de la surface engendrée.

Dans ce cas, les deux binormales B et B_1 ont une direction commune qui est la normale à la surface; nous aurons donc les deux relations

$$B | T_1 = 0, \quad B | N_1 = 0.$$

Nous voyons donc, pour que les formes du fil et les trajectoires des différents points forment les deux systèmes de ligne asymptotiques de la surface engendrée par le fil, qu'il faut que la composante binormale des forces extérieures soit nulle.

Si, en outre de cette condition, on assujettit cette surface à être minima, les deux systèmes de lignes asymptotiques seront orthogonaux; on aura par conséquent les relations

$$T | T_1 = 0, \quad T | N_1 = 1, \quad N | T_1 = 1, \quad N | N_1 = 0.$$

Nous pouvons alors donner l'énoncé suivant :

Pour que la surface engendrée par un fil dans son mouvement soit minima et ait pour lignes asymptotiques les formes de ce fil et les trajectoires de ses différents points, il faut que le mouvement soit tel

qu'à chaque instant le fil ait pour forme la figure d'équilibre sous l'action des forces extérieures diminuées d'une force de composante tangentielle $\frac{v^2}{\rho_1}$ et de composante normale principale $\frac{\partial v}{\partial t}$ et inversement, à moins que les différents points ne décrivent leurs trajectoires d'un mouvement uniforme, ou bien que ces trajectoires ne soient rectilignes.

41. *Remarque.* — Nous retrouvons ici immédiatement la condition énoncée par MM. Appell et Floquet pour que la forme du fil soit ligne géodésique.

Il faut et il suffit, pour que la ligne soit géodésique ⁽¹⁾, qu'on ait

$$N | T_1 = 0.$$

Or on a

$$T | T = 1;$$

d'où, en dérivant par rapport à t ,

$$T \left| \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial t} \right| = 0.$$

La relation pour que la ligne soit géodésique peut alors s'écrire

$$T \left| \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial t} + \frac{N}{\rho} \right| \frac{\partial M}{\partial t} = 0,$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[T \left| \frac{\partial M}{\partial t} \right| \right] = 0.$$

Il faut et il suffit que la composante de la vitesse suivant la tangente soit indépendante de s .

42. *Problème.* — Cherchons la condition pour que les familles de courbes formées par les formes du fil et les trajectoires des différents points soient les deux systèmes de lignes de courbure de la surface engendrée par le fil.

Il faut et il suffit ⁽²⁾, pour que cela ait lieu, que le vecteur $\frac{\partial^2 M}{\partial s \partial t}$

⁽¹⁾ Voir dans le Livre de MM. Burali-Forti et Marcolongo les applications à la Géométrie.

⁽²⁾ La première condition exprime que les courbes $s = \text{const.}$ et $t = \text{const.}$ sont

soit dans le plan tangent à la surface et que de plus on ait

$$T | T_1 = 0.$$

Remarquons que nous avons vu qu'on avait :

$$T \left| \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial t} \right| = 0.$$

En dérivant la relation $T | T_1 = 0$ par rapport à s , nous obtenons

$$T \left| \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial t} \right| + \frac{1}{\rho} N \left| \frac{\partial M}{\partial t} \right| = 0;$$

ce qui nous explique comment dans les calculs faits précédemment, après avoir exprimé que la composante tangentielle était nulle, on obtenait une identité en exprimant que la composante de la vitesse suivant la normale principale était nulle.

Dérivons cette relation

$$N \left| \frac{\partial M}{\partial t} \right| = 0$$

par rapport à s ; il vient

$$(1) \quad -\frac{1}{\rho} T \left| \frac{\partial M}{\partial t} \right| - \frac{1}{\tau} B \left| \frac{\partial M}{\partial t} \right| + N \left| \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial t} \right| = 0.$$

Remarquons que des relations

$$T | T_1 = 0, \quad N | T_1 = 0$$

nous déduisons qu'on a

$$B | T_1 = 1.$$

Donc le vecteur $\frac{\partial^2 M}{\partial s \partial t}$, qui doit être dans le plan tangent et qui est perpendiculaire au vecteur T , doit avoir la même ligne d'application que B et T_1 ; c'est-à-dire que, sous cette condition que T et T_1 sont rectangulaires, pour que $\frac{\partial^2 M}{\partial s \partial t}$ soit dans le plan tangent, il faut et il suffit

conjuguées; pour l'obtenir il suffit de traduire la définition des lignes conjuguées pour ce cas particulier et au moyen des produits géométriques; la seconde condition exprime que ces courbes sont rectangulaires.

qu'on ait

$$N \left| \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial t} \right| = 0.$$

La relation (1) écrite précédemment nous donne

$$-\frac{1}{\tau} = 0,$$

c'est-à-dire que la forme du fil doit être plane et couper la surface orthogonalement; la surface engendrée est une surface de Monge (1); le fil glisse sur une courbe plane invariable dont le plan roule sur une certaine développable.

Remarquons que de plus, comme on a

$$B | N_1 = 0,$$

la troisième équation du mouvement nous donne

$$\frac{\partial v}{\partial t} = X.$$

La composante suivant la binormale des forces extérieures doit être égale à la dérivée par rapport au temps de la vitesse.

Nous déduisons immédiatement ce qui suit :

Si un fil se meut de façon que la vitesse soit normale au fil et sans qu'aucune force binormale n'agisse sur lui, les différents points du fil décrivent leur trajectoire d'un mouvement uniforme et les formes du fil sont des lignes géodésiques de la surface engendrée.

43. *Problème.* — Cherchons la condition pour que la forme du fil soit une ligne de courbure de la surface engendrée.

Si K est un vecteur tracé sur la normale à la surface de longueur unité, si la forme du fil est une ligne de courbure (2), on aura

$$K = N \cos \omega + B \sin \omega$$

(1) Voir H. RÉSAL, *Exposition de la théorie des surfaces*, § 25.

(2) La normale à la surface le long d'une ligne de courbure engendrant une surface développable, l'arête de rebroussement de cette surface est une développée de la ligne de courbure.

avec

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{1}{\tau}.$$

D'autre part $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}$ sera de la forme

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = (\mathbf{T} \cos \alpha + \mathbf{N} \cos \beta + \mathbf{B} \cos \gamma) v$$

avec

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1;$$

on devra avoir

$$\mathbf{K} \left| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right| = 0,$$

ce qui donne

$$v \cos \beta \cos \omega + v \cos \gamma \sin \omega = 0.$$

Si nous supposons la courbe plane, ω est indépendant de s , comme on a

$$\frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = -\tan \omega;$$

donc on a

$$\frac{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \left| \mathbf{N} \right.}{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \left| \mathbf{B} \right.},$$

qui est indépendant de s , et réciproquement si l'on a

$$\frac{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \left| \mathbf{N} \right.}{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \left| \mathbf{B} \right.} = \theta,$$

θ étant une fonction de t , on a

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \lambda \mathbf{T} + \theta \mu \mathbf{N} + \mu \mathbf{B}.$$

Comme on a

$$\mathbf{K} = \mathbf{N} \cos \omega + \mathbf{B} \sin \omega,$$

on en déduit

$$\theta \cos \omega + \sin \omega = 0,$$

ou

$$\tan \omega = -\theta;$$

d'où l'on déduit que ω est indépendant de s ; donc, si la courbe est plane, c'est une ligne de courbure.

Si le rapport entre les composantes de la vitesse suivant la binormale et la normale principale ne dépend que du temps et que le fil ait une forme plane, c'est une ligne de courbure de la surface engendrée, et réciproquement.

44. Reprenons les équations du mouvement que nous venons d'obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} T | T_1 + \frac{v^2}{\rho_1} T | N_1 &= \frac{1}{m} \frac{\partial H}{\partial s} + \Phi, \\ \frac{\partial v}{\partial t} N | T_1 + \frac{v^2}{\rho_1} N | N_1 &= \frac{H}{m\rho} + \Psi, \\ \frac{\partial v}{\partial t} B | T_1 + \frac{v^2}{\rho_1} B | N_1 &= X.\end{aligned}$$

Nous voyons de suite que si les différents points du fil ont des trajectoires rectilignes qu'ils décrivent d'un mouvement uniforme, il faut que la composante X soit nulle, et qu'à chaque instant la figure du fil soit la position d'équilibre du fil soumis aux forces extérieures correspondant à ce même instant.

Supposons que nous ayons un mouvement tel que la composante X soit nulle et qu'à chaque instant la figure du fil soit la position d'équilibre du fil soumis aux forces correspondant au même instant; nous avons alors

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} T | T_1 + \frac{v^2}{\rho_1} T | N_1 = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} N | T_1 + \frac{v^2}{\rho_1} N | N_1 = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} B | T_1 + \frac{v^2}{\rho_1} B | N_1 = 0. \end{cases}$$

Ces trois relations reviennent aux suivantes :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{v^2}{\rho_1} = 0.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}T_1 &= \lambda_1 T + \mu_1 N + \nu_1 B, \\ N_1 &= \lambda_2 T + \mu_2 N + \nu_2 B.\end{aligned}$$

Nous avons en outre les relations que nous allons écrire entre λ_1 , μ_1 , ν_1 ; λ_2 , μ_2 , ν_2 :

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 &= 1, \\ \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 &= 1, \\ \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 &= 0.\end{aligned}$$

En tenant compte de ce système de relations, ajoutons les premiers membres des équations (1) élevés au carré, il vient

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho_1^2} = 0.$$

Si v n'est pas nul, cela nous donne le système de relations

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{v^2}{\rho_1} = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement d'un fil ait lieu de telle sorte que les trajectoires des différents points du fil soient rectilignes et soient décrites d'un mouvement uniforme est que la composante des forces extérieures suivant la binormale de la force du fil soit nulle et qu'à chaque instant la forme du fil soit la position d'équilibre du fil soumis aux forces extérieures correspondant à ce même instant.

45. Nous allons retrouver très rapidement certaines propositions sur le mouvement de repos apparent par cette méthode.

Montrons tout d'abord que, dans le cas du repos apparent, le fil étant inextensible, la vitesse de glissement sur la courbe fixe ne dépend que du temps; soit toujours v la vitesse, dans le cas du repos apparent, on a

$$T | T_1 = 1,$$

ou bien

$$T \left| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right| = v.$$

En dérivant les deux membres par rapport à s , il vient

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial s} \left| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right| + T \left| \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial s \partial t} \right| = \frac{\partial v}{\partial s}.$$

Or on a

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} = \frac{1}{\rho} \mathbf{N} = \frac{1}{\rho} \mathbf{N}_1,$$

d'où

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} \bigg| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = 0.$$

D'autre part, de $\mathbf{T} | \mathbf{T} = 1$ on déduit

$$(3) \quad \mathbf{T} \bigg| \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial s \partial t} = 0;$$

il vient donc, en tenant compte des relations (1), (2) et (3),

$$\frac{\partial v}{\partial s} = 0.$$

Comme, dans le mouvement considéré, les vecteurs $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ sont respectivement identiques à $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{B}_1$, en tenant compte de cela, nous retompons sur les équations dont M. Léauté s'est servi, et nous pouvons par conséquent en tirer les conclusions obtenues précédemment.

Vu et approuvé :

Nancy, le 12 avril 1911.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. FLOQUET.

Vu et permis d'imprimer :

Nancy, le 14 avril 1911.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE NANCY,

CH. ADAM,

Correspondant de l'Institut.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

L'étoile de M. Mittag-Leffler.

Vu et approuvé :

Nancy, le 12 avril 1911.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. FLOQUET.

Vu et permis d'imprimer :

Nancy, le 14 avril 1911.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE NANCY,

CH. ADAM,

Correspondant de l'Institut.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION	1
I. Équations du mouvement.....	6
Application à quelques cas particuliers.....	22
II. Équilibre.....	22
III. Repos apparent.....	29
IV. Mouvement d'un fil glissant sur une courbe de forme invariable, animée d'un mouvement de translation.....	45
V. Mouvement d'un fil glissant sur une courbe qui se déplace en restant homothétique à elle-même, par rapport à l'origine.....	61
VI. Sur quelques mouvements d'un fil dans un plan fixe.....	66
VII. Mouvement d'un fil glissant sur une courbe de forme invariable, animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.....	80
VIII. Mouvement d'un fil glissant sur une courbe de forme invariable, animée d'un mouvement hélicoïdal.....	93
IX. Mouvement d'un fil glissant sur une courbe de forme invariable, animée d'un mouvement quelconque.....	94
X. Mouvement particulier d'un fil, tel que sa forme soit, à chaque instant, une développante d'une courbe invariable en forme et en position.....	110
XI. Mouvement particulier d'un fil, tel que sa forme soit, à chaque instant, une développée d'une courbe invariable en forme et en position.....	127
XII. Quelques remarques sur la surface engendrée par le fil et la forme qu'a le fil sur cette surface.....	134

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
47353 Quai des Grands-Augustins, 55
